

**Lösungsvorschlag zur
Klausur zur Vorlesung Methoden der Verkehrsökonomie
Master-Studiengang
WS 2017/18**

Aufgabe 1 (35 Punkte)

(a) Sachbilanz “Herstellung” direkt aus der Aufgabenstellung:

$$\mathbf{y}_{(\text{Herst})}^{\text{s}} = \begin{pmatrix} 600 \text{ kg Eisen/Stahl} \\ 100 \text{ kg Aluminium} \\ 200 \text{ kg Kunststoffe} \\ 200 \text{ kg sonstige Materialien} \\ 0 \text{ Liter Treibstoffe (Benzin/Diesel)} \end{pmatrix}$$

Hinweis: Die herstellungsbedingten Treibstoffverbräuche sind, allerdings nur als lineare Kette, bei den Emissionsfaktoren des Aufgabenteils (d) mit enthalten.

Die Sachbilanz “Entsorgung” ergibt sich direkt aus den Recyclingquoten R_i des Postens i ,

$$(y_i)_{(\text{Ents})}^{\text{s}} = -(y_i)_{(\text{Herst})}^{\text{s}} R_i = \begin{pmatrix} -180 \text{ kg} \\ -50 \text{ kg} \\ -40 \text{ kg} \\ -60 \text{ kg} \\ 0 \text{ Liter} \end{pmatrix}$$

und die gesamte Bilanz der Herstellung/Entsorgung ist einfach die Summe:

$$\mathbf{y}_{(\text{Herst})}^{\text{s}} + \mathbf{y}_{(\text{Ents})}^{\text{s}} = \begin{pmatrix} 420 \text{ kg} \\ 50 \text{ kg} \\ 160 \text{ kg} \\ 140 \text{ kg} \\ 0 \text{ Liter} \end{pmatrix}$$

(b) Die Sachbilanz für Fall (i), “das alte Fahrzeug wird weitergefahren” ist gerade die Sachbilanz für ein Jahr, also 15 000 km Betrieb. (Achtung: Da das Fahrzeug weitergefahren wird, fallen weder Herstellungs- noch Entsorgungsanteile an!) Der erste Posten (Eisen/Stahl) setzt sich aus dem Verbrauch pro 10 000 km, hochgerechnet auf die tatsächliche Kilometerleistung 15 000 km (Faktor 1.5) und multipliziert mit dem Netto-Verbrauchsanteil $(1 - R_1) = 0.7$ zusammen (auch die Verbrauchsmaterialien außer natürlich dem Treibstoff können recycelt werden!), also

$$y_1^{\text{s}} = 10 \text{ kg} * 1.5 * 0.7 = 10.5 \text{ kg}$$

Die anderen Materialkomponenten berechnen sich analog. Schließlich wird Treibstoff als 5. Komponente der Sachbilanz verbraucht (der natürlich nicht recycelt werden kann):

$$y_5^{\text{s}} = 15\,000 \text{ km} * 9.5 \text{ Liter/km} = 1425 \text{ Liter}$$

Insgesamt ist die Sachbilanz im Fall (i) rein für ein Jahr Betrieb:

$$\mathbf{y}_{(i)}^s = \mathbf{y}_{(1 \text{ Jahr, alt})}^s = \begin{pmatrix} 10.5 \text{ kg} \\ 0 \text{ kg} \\ 12 \text{ kg} \\ 21 \text{ kg} \\ 1425 \text{ Liter} \end{pmatrix}$$

Zur Sachbilanz für Fall (ii) "Verschrottungsprämie angenommen" kommt neben dem einjährigem Betrieb des neuen Fahrzeugs die Entsorgung des alten und die Herstellung des neuen Fahrzeugs hinzu: Aufgrund des sparsameren Verbrauches des Neuwagens werden beim Betrieb nur $15\,000 \text{ km} \cdot 6.5 \text{ Liter/km} = 975 \text{ Liter}$ verbraucht, während die anderen Verbrauchsposten unverändert sind. Insgesamt also

$$\mathbf{y}_{(ii)}^s = \mathbf{y}_{(1 \text{ Jahr, neu})}^s + \mathbf{y}_{(\text{Herst})}^s + \mathbf{y}_{(\text{Ents})}^s = \begin{pmatrix} 10.5 \text{ kg} \\ 0 \text{ kg} \\ 12 \text{ kg} \\ 21 \text{ kg} \\ 975 \text{ Liter} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 420 \text{ kg} \\ 50 \text{ kg} \\ 160 \text{ kg} \\ 140 \text{ kg} \\ 0 \text{ Liter} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 430.5 \text{ kg} \\ 50 \text{ kg} \\ 172 \text{ kg} \\ 161 \text{ kg} \\ 975 \text{ Liter} \end{pmatrix}.$$

- (c) Dies geht analog wie Aufgabenteil (b), nur, dass nun 5 Jahre statt einem Jahr Betrieb vorliegen:

$$\mathbf{y}_{(i)}^s = 5 \mathbf{y}_{(1 \text{ Jahr, alt})}^s = \begin{pmatrix} 52.5 \text{ kg} \\ 0 \text{ kg} \\ 60 \text{ kg} \\ 105 \text{ kg} \\ 7125 \text{ Liter} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{y}_{(ii)}^s = 5 \mathbf{y}_{(1 \text{ Jahr, neu})}^s + \mathbf{y}_{(\text{Herst})}^s + \mathbf{y}_{(\text{Ents})}^s = \begin{pmatrix} 472.5 \text{ kg} \\ 50 \text{ kg} \\ 220 \text{ kg} \\ 245 \text{ kg} \\ 4875 \text{ Liter} \end{pmatrix}.$$

- (d) Die CO_2 -Emissionen sind gleich dem Skalarprodukt der CO_2 -Emissionsfaktoren (1. Zeile der Emissionsfaktorenmatrix) mit der gesamten Sachbilanz während des 5-Jahre-Zeitraums:

$$e_{\text{CO}_2} = \mathbf{C}_{\text{CO}_2} \mathbf{y}^s$$

mit $\mathbf{C}_{\text{CO}_2} = (4, 30, 2, 4, 2.75 \text{ kg/Liter})$ aus der Aufgabenstellung. Das ergibt mit den Vektoren aus (c) für die Szenarien (i) (altes Auto weitergefahren) und (ii) Verschrottungsprämie angenommen die LCA- CO_2 -Emissionen

$$e_{\text{CO}_2}^{(i)} = 20\,300 \text{ kg}, \quad e_{\text{CO}_2}^{(ii)} = 18\,200 \text{ kg}.$$

Mit den Angaben aus der Aufgabenstellung ergeben sich ähnliche Werte:

$$e_{\text{CO}_2}^{(i)} = 19\,970 \text{ kg}, \quad e_{\text{CO}_2}^{(ii)} = 18\,650 \text{ kg}.$$

Diskussion: Aus umweltlicher Sicht, zumindest aus CO₂-Emissionssicht, führt die Verschrottungsprämie zwar im ersten Jahr zu mehr Ausstoß, hat sich aber bald “amortisiert”. Nach 5 Jahren ist die Umweltbilanz zugunsten der Prämie positiv, da 2100 kg CO₂ weniger emittiert werden. Und das berücksichtigt noch nicht einmal, dass *nun* ja im Szenarium (i) ein Fahrzeugwechsel ansteht!

Häufige Fehler

- (a), (b) Genau lesen! Bei (a) gibt es *keine* Betriebsanteile (nicht aus den Vorlagen abkupfern!), bei (b)(i) gibt es *keine* Herstellungs- und Entsorgungsanteile, da das alte Kfz weitergefahren wird, bei (b)(ii) gibt es neben den Herstellungs- und Entsorgungsanteilen aus Teil (a) auch Betriebsanteile für das *neue* Fahrzeug, da das Fahrzeug *am Anfang* des Jahres gewechselt wird.
- (b) Auch Verbrauchsmaterialien können hier in der Aufgabenstellung nach Gebrauch recycelt werden (z.B. das Metall alter Kupplungen, die alten Reifen etc). Nicht aus den Vorlagen (bei denen keine Recyclierung der Verbrauchsmaterialien angenommen war) methodisch abkupfern!
- (d) Ein Skalarprodukt ist eine Zahl, kein Vektor. Außerdem ist in der Aufgabenstellung C_{CO_2} nicht ohne Grund ein *Zeilenvektor*, da nur dieser mit einem Spaltenvektor (der Sachbilanz) skalar multipliziert werden kann.

Aufgabe 2 (40 Punkte)

- (a) Alle exogenen Variablen sind Eigenschaften der Lücke oder der beteiligten Fahrzeuge und daher nicht von der Entscheidung abhängig, die Lücke anzunehmen. Daher müssen alle Attribute wie sozioökonomische Variable implementiert werden.
- (b) Zunächst einmal ist V_1 gleich dem deterministischen Nutzenunterschied zwischen Einfahren und Warten, da $V_2 = 0$ gesetzt wurde.
- β_1 : Alternative Konstante: keine anschauliche Bedeutung, da dies der Nutzen-differenz eines PKW bei einer Zeitlücke null zu einem stehenden Folge-PKW entsprechen würde). Beide Vorzeichen sind möglich.
 - β_2 : Erhöhung des Attraktivitätsunterschiedes Einfahren-Warten pro Sekunde zusätzlicher Zeitlücke. $\beta_2 > 0$ erwartet.
 - β_3 : Erhöhung des Attraktivitätsunterschiedes Einfahren-Warten pro km/h an zusätzlicher Geschwindigkeit des sich nähernden Hauptstraßen-Fahrzeugs. Wegen wachsender Gefährlichkeit $\beta_3 < 0$ erwartet.
 - β_4 : Erhöhung der Attraktivität der Lückennutzung, wenn das einfahrende Kfz ein LKW statt ein PKW ist. Da LKW langsamer beschleunigen, benötigen sie eine größere Lücke, also $\beta_4 < 0$ erwartet.
 - β_5 : Erhöhung der Attraktivität der Lückennutzung, wenn das Hauptstraßen-fahrzeug ein LKW statt ein PKW ist. Da die Lückennutzung hauptsächlich vom einfahrenden Fahrzeug abhängt, eher geringer Einfluss (keine Signifikanz) erwartet, wenn, dann $\beta_5 > 0$ (man will möglichst vor einem LKW einfahren, damit dieser einen dann später auf der Hauptstraße nicht behindert).
- (c) Die sinnvolle Entscheidung bei der 60 s-Lücke ist so glasklar (“Einfahren”), dass dieser Fall keinen Informationsgewinn bringt.

Weitere Information, aber nicht verlangt: Der entsprechende Summand n' der Log-Likelihood $\tilde{L} = \sum_n \sum_i y_{ni} \ln P_{ni}(\beta)$ ist de-facto gleich null, da bei einem sinnvollen Modell selbst weit vom Kalibrationspunkt entfernt der Beitrag entweder $P_{n'i}(\beta) \rightarrow 1$ bzw. $\ln P_{n'i}(\beta) \rightarrow 0$ (einfahren, $y_{n'i} = 1$) oder $P_{n'i}(\beta) \rightarrow 0$ (warten, $y_{n'i} = 0$) ist. Damit trägt die Entscheidung n' nichts, insbesondere keine β -Abhängigkeit, zur Log-Likelihood bei.

- (d) Realisierte Merkmalssumme bei Faktor j :

$$X_j = \sum_n \sum_i y_{ni} x_{jni},$$

wobei auch aggregierte Entscheidungen ($y_{n1} + y_{n2} > 1$) mit berücksichtigt sind. Also

$$\begin{aligned} X_1 &= \sum_n y_{n1} = 1 + 2 + 1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 = 14, \\ X_2 &= \sum_n y_{n1} T_n = 1 * T_3 + 2 * T_5 + \dots + 1 * T_{14} = 138 \text{ s}, \\ X_3 &= \sum_n y_{n1} v_n = 1 * v_3 + 2 * v_5 + \dots + 1 * v_{14} = 500 \text{ km/h}, \end{aligned}$$

$$X_4 = 3 \text{ (es gibt nur 3 einfahrende LKW),}$$

$$X_5 = 4 \text{ (es gibt 4 Einfahrten vor Hauptstraßen-LKW),}$$

(man beachte, dass $T_{n1} = T_{n2} = T_n$ usw, was den formal-sozioökonomischen Charakter dieser Faktoren widerspiegelt)

- (e) Die Wahrscheinlichkeit ändert sich nicht, wenn $dV_1 = 0$
- Änderung der Zeitlücke pro zusätzlicher km/h des Hauptstraßenfahrzeugs:

$$dV = \beta_2 dT + \beta_3 dv \Rightarrow dT = -\frac{\beta_3}{\beta_2} 1 \text{ km/h} = 0.117 \text{ s}$$

- Änderung der Zeitlücke, wenn LKW statt PKW einfahrend:

$$dV = \beta_2 dT + \beta_4(1 - 0) \Rightarrow dT = -\frac{\beta_4}{\beta_2} = 0.575 \text{ s}$$

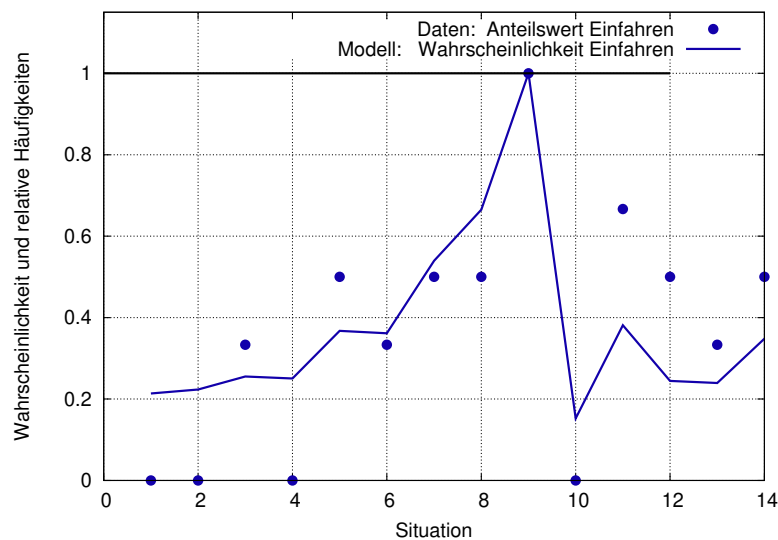
- (f) Zeitlücke $T = 6 \text{ s}$, Geschwindigkeit des Hauptstraßen-PKW $v = 54 \text{ km/h}$, einfahrend ein LKW

$$V_1 = \beta_1 + \beta_2 * 6 \text{ s} + \beta_3 * 54 \text{ km/h} + \beta_4 + 0 * \beta_5 = -1.32,$$

$$\exp(V_1) = 0.267,$$

$$P_1 = \frac{\exp(V_1)}{\exp(V_1) + 1} = 0.211.$$

Siehe zur Information auch folgenden Plot für die modellierten Wahrscheinlichkeiten und die realisierten relativen Häufigkeiten laut Tabelle:



- (g) Die “normale” Regression funktioniert nur, wenn die endogene Variable y metrisch ist. Hier ist für jede Einzelentscheidung $y = 0$ oder $=1$. Betrachtet man aber nicht y , sondern $V_1 - V_2 = V_1$ als endogene Variable, sind die Bedingungen für eine Regression erfüllt. Definiert man die Ereignisse $i = 1 : V_1 - V_2 \geq 0$ und $i = 2 : V_1 - V_2 < 0$ und nimmt an, dass die Zufallskomponente logistisch statt standardnormalverteilt sind (die Differenz zweier i.i.d. Gumbelverteilter Zufallsvariablen ist logistisch verteilt, es ist also wie das Logit-Modell spezifiziert), erhält man für das *Odds-Ratio*

$$\frac{P(i = 1)}{P(i = 2)} = \frac{\exp(V_1)}{\exp(V_2)} = \exp(V_1),$$

also genau den Logit-Ausdruck.

Häufige Fehler

- (a) Nicht aus Vorlagen abschreiben! Hier wird die Unterscheidung Stated/Revealed Choice gar nicht verlangt, obwohl es einige reflexhaft niederschrieben ...
- (b) Wieder: nicht einfach aus den vergangenen Aufgaben abschreiben! “Geschwindigkeitssensitivität” ist hier viel zu unspezifisch, da es mehrere Geschwindigkeiten gibt: Also hier: “Erhöhung des Attraktivitätsunterschieds Einfahren-Warten pro km/h zusätzlicher Geschwindigkeit des Hauptstraßen-Fz”. Dann sieht man auch unmittelbar, dass $\beta_3 < 0$ erwartet wird.
- (c) Hier ist Verständnis verlangt: Obwohl von den Daten her ein “Ausreißer”, hat der Fall mit der 60-Sekunden Zeitlücke keinerlei Einfluss auf die Kalibrierung/ das Ergebnis. Das sieht man einfach am Ausdruck der Maximum-Likelihood $\tilde{L} = \sum_{ni} y_{ni} \ln P_{ni}$:
- Falls “Ja” zu einer binären Alternative i nahezu sicher (wie hier beim “Ausreißer”), ist $P_{ni} \rightarrow 1$ und damit $y_{ni} \ln P_{ni} \rightarrow 0$. Gleichzeitig ist eine Entscheidung für die andere Alternative i' extrem unwahrscheinlich, also sollte $y_{ni'} = 0$ sein. Einen echten “Ausreißer” gibt es nur, wenn sich eine Person extrem untypisch verhält, also z.B. bei 60-Sekunden Lücke nicht rausfährt, $y_{ni'} = 1$. Dann ergibt der Summand $y_{ni'} \ln P_{ni'}$ einen sehr großen Beitrag (wegen des stark negativen $\ln P_{ni'}$), der die Schätzung stark verfälscht.
 - Falls “Ja” zu einer binären Alternative i nahezu ausgeschlossen, dreht sich die Argumentation $i \leftrightarrow i'$ einfach um.
- (d) Und noch einmal: nicht einfach aus den vergangenen Aufgaben abschreiben! Hier wurde eine modellierte Merkmalssumme für $\beta = 0$ im Gegensatz zu den vergangenen Aufgaben *nicht* verlangt.

Aufgabe 3 (45 Punkte)

- (a) Da die endogene Variable y der Regression stetig sein muss, sind Entleihzahlen deutlich über 1 nötig. Dann kann man sie als quasi-stetig behandeln.
- (b) – Zunächst einmal müssen die Entleihzahlen N nichtnegativ sein. Modelliert man $y = \ln N$, dann ist $N > 0$ für beliebige y (allerdings sollte nach (a) N sogar deutlich größer als 1 sein)
- Änderungen durch veränderter Lage, Preis oder Wetter geschehen eher multiplikativ (z.B. 50% mehr) als additiv (z.B. 5 Entleihungen mehr). Andernfalls würden z.B. von schönem statt schlechten Wetter die kleinen Stationen unrealistischerweise überproportional reagieren, z.B. 8 statt 3 Entleihungen, während es bei den großen z.B. 105 statt 100 Entleihungen gibt

Hinweis: eine Antwort genügt; plausible andere Antworten bekommen ebenfalls volle Punktzahl

- (c) Wichtig sind die Faktoren, die das Unternehmen bei der Platzwahl beeinflussen kann, also Zentralität x_1 und die Entfernungsfaktoren x_2 und x_3 . Eingeschränkt auch der Preis, aber dieser sollte bei den alten und neuen Stationen gleich sein. Gar nicht die Konstante und das Wetter.
- (d) Würde man die Entfernung nur mit einem Faktor, z.B. x_2 , modellieren, kann das Modell nur eine lineare Zunahme oder Abnahme nachbilden, nicht jedoch eine optimale Entfernung, die die Überlegungen in der Aufgabenstellung nahelegen. Man benötigt also eine Funktion mit einem Maximum, und die einfachste davon ist die quadratische mit den Parametern β_2 und β_3 (und der Konstanten β_0).
- Für kleine Entfernungen wird eine mit der Entfernung ansteigende Attraktivität erwartet, also $\beta_2 > 0$.
- Es soll ein Maximum (und kein Minimum) enthalten sein, also ist der quadratische Vorfaktor $\beta_3 < 0$.
- (e) Zentral gelegen: $x_1 = 1$, Preis $x_4 = 2$ Euro, schlechtes Wetter ($x_5 = 0$) und eine Entfernung von 0.5 km: $x_2 = 0.5$ km und $x_3 = 0.25$ km². Damit (Einheiten weglassen)

$$y = \beta_0 + \beta_1 + 0.5\beta_2 + 0.25\beta_3 + 2\beta_4 = 3.219, \quad N = e^y = 25.$$

Bei schönem Wetter steigt der Logarithmus der Entleihzahlen um den Betrag $\beta_5 = 0.693$ und damit die Entleihzahlen selbst um den Faktor $e^{\beta_5} = 2$. Also sind bei schönem Wetter die Entleihzahlen $N = 50$.

- (f) Die vier bekannten Schritte eines Signifikanztests:
1. Nullhypothese ist das Gegenteil der zu zeigenden Behauptung, also $H_0 : \beta_1 \leq 0$.
 2. Varianz unbekannt und Stichprobenumfang nicht sehr groß \Rightarrow Student-t Test mit Testvariable

$$T = \frac{\hat{\beta}_1 - 0}{\sqrt{\hat{V}_{11}}} \sim T(16 - 6) | H_0 \quad \text{grenzwertig erfüllt}$$

3. Realisierung in Stichprobe:

$$t = \frac{2.5}{\sqrt{1.1}} = 2.38$$

4. Entscheidung: H_0 ablehnbar bei α , falls (siehe Tabelle)

$$t > t_{1-\alpha, n-m} = t_{0.95, 10} = 1.812$$

Dies ist der Fall, also hat die Zentralität einen signifikant positiven Einfluss ($p = 1 - F_T(t) = 0.0192^*$)

Analog mit dem Wettereinfluss:

1. Nullhypothese ist das Gegenteil der zu zeigenden Behauptung, also $H_0 : \beta_5 = 0$.
- 2.

$$T = \frac{\hat{\beta}_5 - 0}{\sqrt{\hat{V}_{55}}} \sim T(16 - 6) | H_0$$

3. Realisierung in Stichprobe:

$$t = \frac{0.693}{\sqrt{0.01}} = 6.93$$

4. Entscheidung: H_0 ablehnbar bei α , falls (siehe Tabelle)

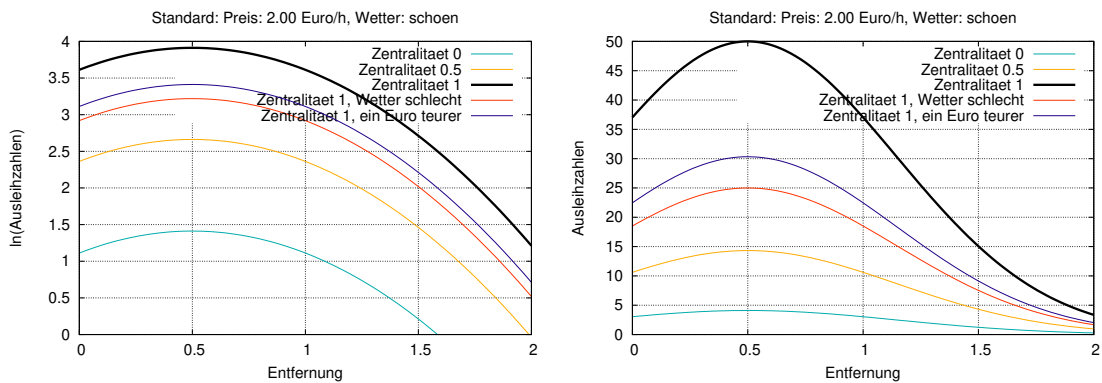
$$|t| > t_{1-\alpha/2, n-m} = t_{0.975, 10} = 2.228$$

Dies ist der Fall, also hat das Wetter einen signifikanten Einfluss ($p = 2(1 - F_T(|t|)) = 2 \cdot 10^{-5} ***$). Allerdings sagt dieser Test nichts über die Richtung aus.

- (g) Notwendige Bedingung für ein Maximum bezüglich der Entfernung x_2 mit $x_3 = x_2^2$, wenn alle anderen Faktoren x_1 , x_4 und x_5 konstant sind:

$$y = \text{const} + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_2^2, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = \beta_2 + 2\beta_3 x_2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{\beta_2}{2\beta_3} = 0.5 \text{ km}$$

Wegen $\beta_3 < 0$ ist dies auch tatsächlich ein Maximum, siehe die folgenden Plots



Statistischer Test:

1. Gegeben: $H_0 : r_{\text{opt}} = -\beta_2/(2\beta_3) > 1 \text{ km}$
2. Um die t-verteilte Testfunktion zu formulieren, formulieren wir H_0 als Linearkombination der β um (die Einheiten werden nun weggelassen)¹

$$H_0 : -\beta_2 < 2\beta_3 \quad \text{bzw.} \quad \gamma = \beta_2 + 2\beta_3 > 0$$

und damit

$$T = \frac{\hat{\gamma}}{\sqrt{\hat{V}(\hat{\gamma})}} = T(10)|_{H_0}$$

3. Es gilt $\hat{\gamma} = \hat{\beta}_2 + 2\hat{\beta}_3 = -1.2$. Die geschätzte Varianz von $\hat{\gamma}$ aus den üblichen Varianzregeln:

$$\hat{V}(\hat{\gamma}) = \hat{V}(\hat{\beta}_2 + 2\hat{\beta}_3) = \hat{V}_{22} + 4\hat{V}_{33} + 4\hat{V}_{23} = 1.9$$

und damit die Realisierung

$$t = \frac{-1.2}{\sqrt{1.9}} = -0.871$$

4. H_0 kann nur verworfen werden, wenn

$$t < -t_{1-\alpha,10} = -t_{0.9,10} = -1.372$$

Dies ist nicht der Fall ($p = F_T(t) = 0.202$)

Häufige Fehler

- (e) Immer im Hinterkopf behalten, dass y der *natürliche Logarithmus* der Entleihzahlen ist. Die Entleihzahlen selbst sind also e^y und eine Erhöhung von y um einen *Betrag* Δy entspricht einer Erhöhung der Entleihzahlen um einen *Faktor* $e^{\Delta y}$.
- (f) Bei Signifikanztest zunächst checken, ob es sich um Punkt- oder Intervallhypothesen handelt. Bei (i) ist das Gegenteil von “positiv” “nicht-negativ”, also $H_0: \beta_1 \leq 0$, also eine Intervallhypothese. In Teil (ii) handelt es sich hingegen um eine Punkthypothese.

¹*Achtung!* Da $\beta_3 < 0$, führt die folgende Multiplikation mit $2\beta_3$ zu einer Vorzeichenumkehr der Ungleichung!