

**Klausur zur Vorlesung Verkehrsökonomie,
für Diplom-Studenten
WS 2008/09
Lösungsvorschlag**

Aufgabe 1 (35 Punkte)

- (a) *Das Logit-Modell wird üblicherweise zur Modellierung der Verkehrsaufteilung herangezogen. Könnte man es auch für andere Schritte des Vierstufenprozesses verwenden?*

Ja, und zwar in allen Situationen diskreter Wahlentscheidungen, wenn man die Unsicherheit der Nutzenfunktion explizit modellieren will:

- zur Verkehrsverteilung, vor allem als Teil der simultanen Ver- und Aufteilung,
- zur Verkehrsumlegung \Rightarrow entspricht stochastischen Umlegungsmodellen.

- (b) *Bei der Verkehrsmittelwahl mit dem Logit-Modell werden mit endlicher Wahrscheinlichkeit auch nichtoptimale Verkehrsmittel gewählt, also solche, bei denen der im Exponenten stehende Nutzen nicht maximal ist. Wird also bei diesem Modell nicht der individuelle Nutzen maximiert? Begründen Sie ihre Antwort (ein Stichwort genügt).*

Doch. Zufallsnutzen.

Der maximierte individuelle Nutzen ist die Summe aus dem (durch die Nutzenfunktion gegebenen und im Exponenten stehenden) deterministischen Nutzen und den Zufallsnutzen. Dadurch sind maximale individuelle Nutzen für die Alternativen möglich, bei denen der deterministische Nutzen nicht maximal ist.

- (c) *Warum ist bei der Verkehrsverteilung und -aufteilung die Reisezeit als Aufwandskriterium geeigneter als die Reiseweite?*

Da sie konstanter und verkehrsmittelunabhängiger ist.

Wie könnte man, entweder durch Zusatzterme beim Aufwand oder durch Modifikation des Auswahlmodells selbst, folgende Situationen modellieren:

- *Unterschiedliche Kosten der Verkehrsmittel, Zusätzlicher Kostenanteil zum üblichen Zeitanteil des Aufwandes*
- *Kein ÖV auf einer bestimmten Relation $i \rightarrow j$, Hohe "Strafkosten" bzw. "Strafaufwand" für diese Relation und dieses Verkehrsmittel*
- *nur 30% der Bezugspersonen der betrachteten Quelle-Ziel-Gruppe besitzen ein Kfz, Disaggregation. 30% werden mit normalen Kfz-Aufwand aufgeteilt, bei 70% wird das Kfz durch hohe Strafkosten verboten oder als Alternative von vorne herein ausgeschlossen.*
- *bei Kfz und ÖV werden längere Reisezeiten in Kauf genommen als mit dem Rad oder zu Fuß, Der Zeitanteil des Aufwandes wird mit einem Faktor < 1 multipliziert.*
- *das Kfz wird global bevorzugt. Es bekommt einen konstanten Bonus (negativer Aufwand) oder alle anderen Modi bekommen einen konstanten Zusatzaufwand.*

- (d) *Als Ergebnis der Aufteilung bzw. der simultanen Ver- und Aufteilung nach dem Kennwertmodell erhalten Sie nach Modi und Quelle-Ziel-Gruppen unterschiedene Verkehrsstrommatrizen $V_{i,j,k}^{(g)}$. Ein Element davon ist z.B. $V_{2,7,Kfz}^{(AW)} = 550$ Erläutern Sie möglichst präzise, was dieses Element und sein Wert aussagt.*

550 Erwerbstätige fahren jeden Bezugstag (=Werktag) mit dem Kfz von der Arbeitsstätte in Bezirk 2 zur Wohnung in Bezirk 7.

(e) *Was für vorbereitende Operationen muss man durchführen, um von den $V_{i,j,k}^{(g)}$ die für die MIV-Umlegung nötigen Fahrtenmatrizen zu erhalten?*

1. Umrechnung Personen- in Fahrzeugfahrten (nur beim MIV)
2. Disaggregation in die betrachteten Zeitscheiben
3. Aggregation über alle Quelle-Ziel-Gruppen

(f) *Zur Verkehrsverteilung im belasteten Netz werden als Input neben den Quell- und Zielsummen die Widerstandsmatrixelemente W_{ij} benötigt.*

Was bedeuten die W_{ij} ? Aufwand bzw. Widerstand, um von Bezirk i nach j zu gelangen. Üblicherweise Gesamt-Reisezeit.

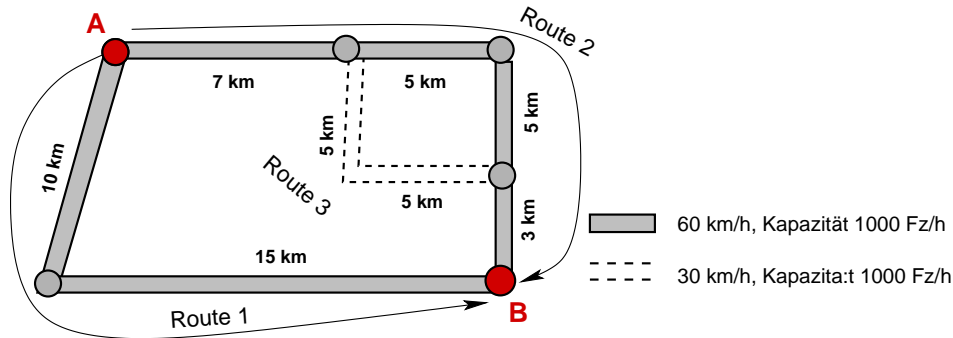
Wie berechnet man die Elemente? Über einen Kürzesten-Wege-Algorithmus (z.B. Dijkstra oder Floyd-Warshall) im Verkehrsnetzwerk.

Welcher Schritt muss dazu schon durchgeführt sein?

Die Umlegung \Rightarrow Rückkopplung. Anfang mit leerem Netz.

Aufgabe 2 (35 Punkte)

Das abgebildete Netzwerk soll für Fahrten von A nach B umgelegt werden. Alle Strecken haben dieselbe endliche Streckenkapazität K . Lineare CR-Funktion.



- (a) Route 3 sei zunächst nicht aktiv. Legen Sie das verbleibende Netz in Abhängigkeit der normierten Nachfrage $q = Q_{AB}/K$ um, d.h. bestimmen Sie für das Nutzergleichgewicht den Anteil $w_1(q)$ der Fahrzeuge, welche Route 1 benutzen. Machen Sie ggf. eine Fallunterscheidung.

Reisezeiten in Abhängigkeit der Aufteilungen w_1 und $w_2 = 1 - w_1$ auf die Routen 1 und 2:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= 25(1 + qw_1), \\ \tau_2 &= 20(1 + q(1 - w_1)).\end{aligned}$$

Zunächst Annahme $0 < w_1 < 1$. Dann gilt nach Wardrop $\tau_1 = \tau_2$:

$$\begin{aligned}5 + 25qw_1 &= 20q - 20qw_1 \\ 1 + 5qw_1 &= 4q - 4qw_1 \\ 1 + 9qw_1 &= 4q\end{aligned}$$

Also $w_1 = (4q - 1)/(9q)$. Die Annahme $0 < w_1 < 1$ ist erfüllt für $q > 1/4$, ansonsten ist $w_1 = 0$ und $\tau_1 \geq \tau_2$. Also

$$w_1 = \begin{cases} \frac{4q-1}{9q} & q > 1/4 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{9} \left(4 - \frac{1}{q}\right) & q > 1/4 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (b) Berechnen Sie nun für weiterhin inaktive Route 3 das Systemoptimum für eine Nachfrage von $Q_{AB} = 2000$ Fz/h. Wieviel Prozent der Reisezeit würde durch das Systemoptimum im Vergleich zum Wardrop-Gleichgewicht gespart?

Im Systemoptimum ist die globale und damit auch die gewichtete mittlere Reisezeit minimal:

$$\langle \tau \rangle = w_1 \tau_1 + (1 - w_1) \tau_2 \stackrel{!}{=} \min.$$

Also

$$\frac{d\langle \tau \rangle}{dw_1} = \tau_1 + w_1 \frac{d\tau_1}{dw_1} - \tau_2 + (1 - w_1) \frac{d\tau_2}{dw_1} = 0.$$

Einsetzen der Gleichungen für τ_i mit $Q_{AB} = 2000$ Fz/h, also $q = 2$:

$$\begin{aligned}25(1 + 2w_1) + 50w_1 - 20(1 + 2(1 - w_1)) - 40(1 - w_1) &= 0 \\ w_1(50 + 50 + 40 + 40) &= -25 + 60 + 40\end{aligned}$$

mit dem Ergebnis

$$w_1 = \frac{5}{\underline{\underline{12}}} = 0.4167.$$

Einsetzen in die mittlere Reisezeit:

$$\langle \tau \rangle (q = 2, w_1 = 15/36) = \underline{\underline{44.375}}$$

Vergleich mit Nutzergleichgewicht: $\tau_1 = \tau_2 = \underline{\underline{44.44}}$ Also werden nur 0.07 min gespart.

- (c) *Nach einem allgemeinen Prinzip kann man das Systemoptimum auch als Wardropgleichgewicht mit folgendermaßen veränderten CR-Funktionen berechnen:*

$$\tilde{T}(Q) = \left(1 + Q \frac{d}{dQ}\right) T(Q)$$

Wie sehen die CR-Funktionen also in unserem Fall aus? Berechnen Sie damit das Nutzergleichgewicht (inaktive Route 3) und zeigen Sie, dass das Ergebnis dasselbe wie das Systemoptimum bezüglich der ursprünglichen CR-Funktionen vom Aufgabenteil (b) ist.

Hier gilt also

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_1 &= 25(1 + 2qw_1), \\ \tilde{\tau}_2 &= 20(1 + 2q(1 - w_1)).\end{aligned}$$

Dies sind formal dieselben Gleichungen wie bei (a), wenn man $\tilde{q} = 2q$ setzt, also das Nutzergleichgewicht mit *doppelter* Nachfrage berechnet.

Das Ergebnis deshalb direkt aus (a):

$$w_1 = \frac{4\tilde{q} - 1}{9\tilde{q}} = \frac{8q - 1}{18q} \quad \underline{\underline{q=2}} \quad \underline{\underline{\frac{15}{36}}} = 0.4167.$$

- (d) *Berechnen Sie nun das Nutzergleichgewicht für $Q_{AB} = 2\,000$ Fz/h und aktivierter Route 3. Welche Anteile w_1, w_2 und w_3 ergeben sich? wie hoch sind die dazugehörigen Reisezeiten?*

Nun gilt allgemein

$$\begin{aligned}\tau_1 &= 25 + 25qw_1, \\ \tau_2 &= 20 + 10q(w_2 + w_3) + 10qw_2, \\ \tau_3 &= 30 + 10q(w_2 + w_3) + 20qw_3.\end{aligned}$$

Mit $q = 2$ und $w_1 = 1 - w_2 - w_3$:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= 5(15 - 10w_2 - 10w_3), \\ \tau_2 &= 5(4 + 8w_2 + 4w_3), \\ \tau_3 &= 5(6 + 4w_2 + 12w_3)\end{aligned}$$

Es gilt $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3$. Dies ergibt zwei unabhängige Bedingungen, z.B. $\tau_3 - \tau_1 = 0$ und $\tau_3 - \tau_2 = 0$:

$$\begin{aligned}-9 + 14w_2 + 22w_3 &= 0, \\ 2 - 4w_2 + 8w_3 &= 0.\end{aligned}$$

Lösung ergibt

$$w_1 = \underline{\underline{0.38}}, \quad w_2 = \underline{\underline{0.58}}, \quad w_3 = \underline{\underline{0.04}}.$$

- (e) Betrachten Sie nun das quasi-leere Netz. Führen Sie eine stochastische Umlegung mit dem Logitmodell unter Verwendung der negativen Reisezeit als Nutzenfunktion durch (Unschärfe $1/\beta=5 \text{ min}$). Als Alternativen stehen alle drei Routen mit dem Auto zur Auswahl (Reisezeiten $\tau_1 = 25 \text{ min}$, $\tau_2 = 20 \text{ min}$, $\tau_3 = 30 \text{ min}$) sowie zusätzlich als vierte Alternative eine Busfahrt (Dauer 25 min).

Logit-Modell:

$$P_i = w_i = \frac{e^{\beta U_i}}{\sum_j e^{\beta U_j}} = \frac{e^{-\beta \tau_i}}{\sum_j e^{-\beta \tau_j}}, \quad j = 1, \dots, 4.$$

Nenner:

$$N = \sum_j e^{\beta U_j} = e^{-5} + e^{-4} + e^{-6} + e^{-5} = \underline{\underline{0.03427}}$$

Anteile:

$$w_1 = \frac{e^{-\tau_1}}{N} = \underline{\underline{0.197}}, \quad w_2 = \frac{e^{-\tau_2}}{N} = \underline{\underline{0.534}}, \quad w_3 = \frac{e^{-\tau_3}}{N} = \underline{\underline{0.072}}, \quad w_4 = \frac{e^{-\tau_4}}{N} = \underline{\underline{0.197}}.$$

Aufgaben 3,4

Wie bei den Masters.