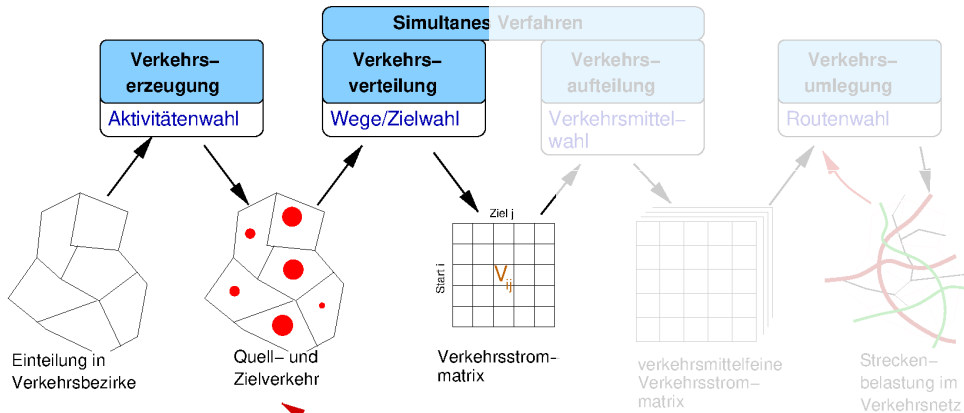


6. Zielwahl bzw. Verkehrsverteilung



- ▶ 6.1 Zielsetzung
- ▶ 6.2 Randsummen und Freiheitsgrade
- ▶ 6.3 Grundmodell der Verteilung
- ▶ 6.4 Widerstand und Wegebewertung
- ▶ 6.5 Reihenfolge der Ziel- und Verkehrsmittelwahl
- ▶ 6.6 Konkrete Modelle
- ▶ 6.7 Lösung der Modelle

6.1 Zielsetzung der Verkehrsverteilung

Ermittlung der Elemente V_{ij} der Verkehrsstrommatrix unter Berücksichtigung der Randsummenbedingungen (RSB). Für harte RSB gilt beispielsweise

$$\sum_j V_{ij} = Q_i \quad \text{Quellsummenbedingung,}$$

$$\sum_i V_{ij} = Z_j \quad \text{Zielsummenbedingung.}$$

- ▶ V_{ij}^g : mittleren Zahl der täglichen Wege von Bezirk i nach Bezirk j
ggf disaggregiert nach QZG g , aber die spielen hier keine Rolle, da sequentiell bearbeitet; keine Kopplung
- ▶ Die RSB sind der Input aus der Aktivitätenwahl/Erzeugung
- ▶ Die **Gesamtmobilität** (in einer QZG) ist durch die "Summen-Summe" $V = \sum_{ij} V_{ij}$ gegeben

6.2 Randsummen und Freiheitsgrade

	$j = 1$	$j = 2$	\cdots	$j = n$	$\sum_{j=1}^n V_{ij} = Q_i$
$i = 1$	V_{11}	V_{12}	\cdots	V_{1n}	Q_1
$i = 2$	V_{21}	V_{22}	\cdots	V_{2n}	Q_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$i = n$	V_{n1}	V_{n2}	\cdots	V_{nn}	Q_n
$\sum_{i=1}^n V_{ij} = Z_j$	Z_1	Z_2	\cdots	Z_n	$V = \sum_{j=1}^n Z_j = \sum_{i=1}^n Q_i$

- ▶ Bei n Bezirken gibt es n^2 Unbekannte V_{ij} bei $2n - 1$ Restriktionen durch die RSB $\Rightarrow (n - 1)^2$ Freiheitsgrade
- ? Warum gibt es $2n - 1$ und nicht $2n$ RSB? Da die Summe der Quell- und die der Zielsummen immer gleich der Gesamtmobilität sind
- ▶ Harte Randsummen gibt es für Aktivitäten mit vorgegebenen Ort, also W,A,B,K. Damit haben WA, WB, WK (Typ I) und AW, BW, KW (Typ II) harte RSB.
- ▶ Andere Aktivitäten wie S,E,F haben **weiche** bzw **freie** Randsummen \Rightarrow **Lagegunst** spielt eine Rolle \Rightarrow gemischte oder weiche RSB

6.3 Grundmodell der Verteilung

$$\frac{V_{ij}}{V} := v_{ij} = B_{ij} f_i g_j, \quad B_{ij} = B(W_{ij}) \quad \text{Grundmodell der Verteilung}$$

Die Verkehrsströme sind proportional ...

- ▶ zum gesamten täglichen Verkehrsaufkommen $V = \sum_{ij} V_{ij}$ (in der jeweiligen Quelle-Ziel Gruppe)
- ▶ zur **Bewertung** B_{ij} des **Widerstands** W_{ij} bzw. der Attraktivität des entsprechenden Weges,
- ▶ zu zwei multiplikativen Faktoren f_i und g_j , deren Werte sich aus den Quell- und Zielsummen sowie aus der Art der RSB ergeben: **bilineares Modell**

Ohne Wegebewertung ("alle Wege sind gleich attraktiv", $B_{ij} = 1$, **Zufallsmodell**) ergibt sich $f_i = Q_i/V \equiv q_i$ und $g_j = Z_j/V \equiv z_j$: Der Verkehr $V_{ij} = V q_i z_j$ auf Relation $i - > j$ ist dann proportional ...

- ▶ zum Gesamtverkehr V
- ▶ zum Anteil q_i des Verkehrs, der aus Bezirk i kommt
- ▶ zum Anteil z_j des Verkehrs, der Bezirk j als Ziel hat

6.4 Widerstand und Wegebewertung

Widerstandsfunktion

Der **Widerstand** eines Weges von i nach j ist eine lineare Funktion der Einflussfaktoren für die Attraktivität, insbesondere die Reisezeit und/oder die Entfernung

? Geben Sie weitere Faktoren an!

!

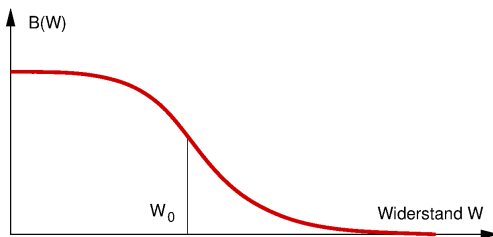
- *Ad-hoc*-Kosten,
- Opportunität ("kann ich andere Aufgaben gleich miterledigen?")
- Flexibilität (räumlich, zeitlich),
- Sicherheit,
- Zuverlässigkeit,
- Bequemlichkeit

? Was ist bis auf die Entfernung bei allen weiteren Kriterien das Problem? Sie hängen stark vom Verkehrsmodus ab, der noch nicht gewählt ist (\Rightarrow Vorlesung 07)

? Welches grundlegende Problem tritt demzufolge auf, wenn man, wie hier, erst das Ziel und dann das Verkehrsmittel bestimmt? Henne-Ei-Problem: Wie will ich bestes Ziel bestimmen, wenn dieses vom Verkehrsmittel abhängt? Lösung: Gleichzeitig bestimmen

Wegebewertung

Die **Bewertung** $B(W)$ ist eine i.A. nichtlineare Funktion des Widerstandes



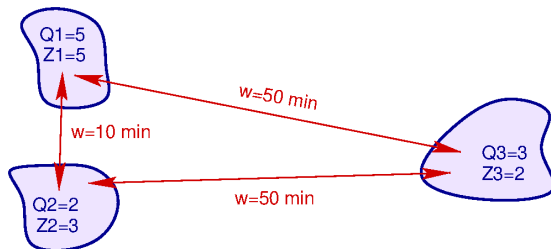
- ▶ Häufig verwendete Funktionen sind $B(W) = e^{-W} \Rightarrow$ **Wilson-Modell** und $B(W) = \min[1, (W_0/W)^E] \Rightarrow$ **klassisches Gravitationsmodell**
- ? Warum kann man immer $B(0) = 1$ setzen? Da B nur einen Proportionalitätsfaktor darstellt
- ? Welche Plausibilitätsanforderungen sind an $B(W)$ zu stellen? $B(0) = 1, B'(W) \leq 0, \lim_{W \rightarrow \infty} B(W) = 0$
- ? Checken Sie die Plausibilitätsbedingungen des Wilson- und des klassischen Gravitationsmodells. Warum erfüllt das Zufallsmodell diese nicht?

Lagegunst der Bezirke

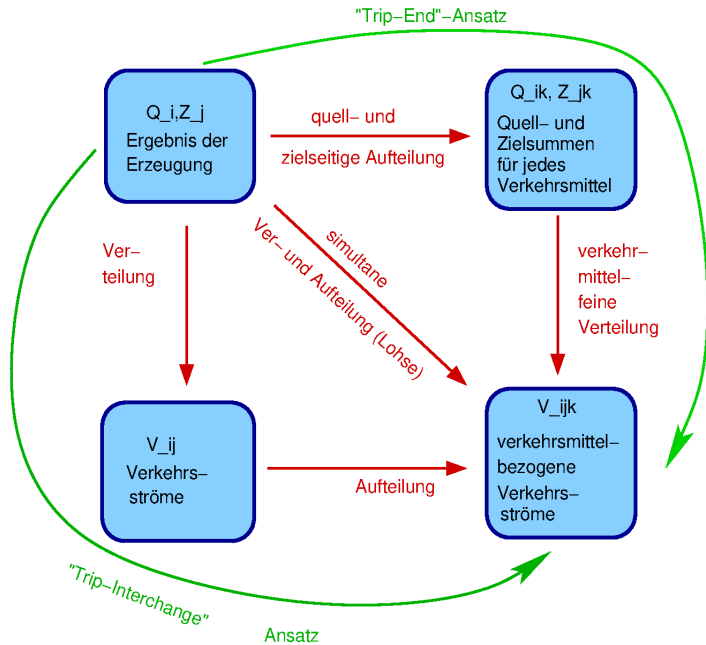
$$L_i = \frac{1}{2V} \sum_j (B_{ij}Z_j + B_{ji}Q_j)$$

Diese Maßzahl für die Lagegunst des Bezirks i geht von 0 ("in the middle of nowhere") bis 1 (Zentralbezirk, "da brummt der Bär"). **Machen Sie sich die Formel und den Wertebereich von 0 bis 1 plausibel** Erster Term Ziel-, zweiter Term Quell-Lagegunst; $B_{ij} \leq 1$ und $V = \sum_j Q_j = \sum_j Z_j$

- ▶ Analog kann man Lagegunstfaktoren nur für den hereinkommenden und herausgehenden Verkehr definieren: $L_i^{\text{ein}} = \frac{1}{V} \sum_j B_{ji}Q_j$ sowie $L_i^{\text{aus}} = \frac{1}{V} \sum_j B_{ij}Z_j$
 - ▶ Wichtig für die flexiblen Aktivitäten wie E,F,S. Attraktive Bezirke bekommen in den entsprechenden QZG mehr Wege ab, als es ihren Quell- bzw. Zielsummen entspricht
- ? Welcher Bezirk hat im abgebildeten Untersuchungsgebiet eine eher schlechte Lagegunst?



6.5 Reihenfolge der Ziel- und Verkehrsmittelwahl



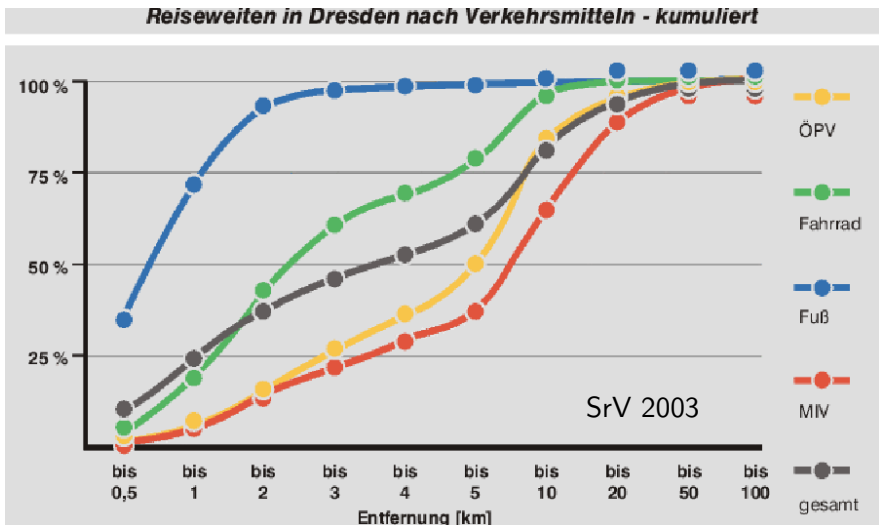
Das Henne-Ei-Problem

- ▶ **Trip-Interchange-Ansatz:** Erst Ziel-, dann Verkehrsmittelwahl (wie in dieser VL)
- ▶ **Trip-End-Ansatz:** Erst Verkehrsmittelwahl, dann Zielwahl
- ▶ **Simultane Ziel- und Verkehrsmittelwahl:**
 - ▶ Ebenso wie die Zielwahl baut die Verkehrsmittelwahl auf Zeiten, Kosten, Flexibilität usw auf \Rightarrow beschreibe sie einheitlich mit derselben Methodik \Rightarrow VS-Matrizen V_{ijk}
 - ▶ Die RSB werden dann zu $\sum_j \sum_k V_{ijk} = Q_i$ usw.
 - ▶ Das Wilson-Modell wird dann zum **Multinomial-Logit-Modell (MNL)**

Beschreiben Sie das “Henne-Ei-Problem” bei den ersten beiden Ansätzen

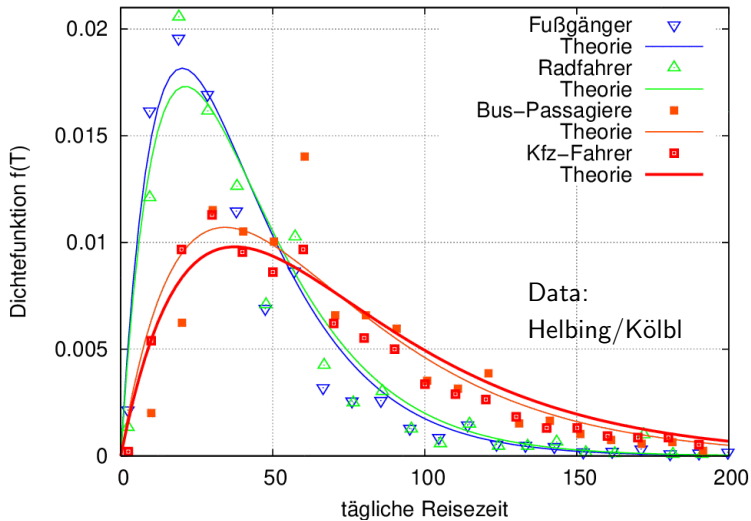
- ▶ **Trip-Interchange:** Bei der Berechnung der Widerstände zu den Zielen ist die Reisezeit wichtig, diese hängt aber stark vom noch unbekanntem Modus ab
- ▶ **Trip-End:** Die Verkehrsmittelwahl hängt stark vom Zielbezirk, insbesondere von dessen Entfernung zum Startbezirk ab. Das Ziel ist aber noch unbekannt

Empirie: Beispiel der entfernungsabhängigen Häufigkeit



⇒ [zurück zu Wilson-Modell](#)

Größerer Datensatz



[⇒ zurück zu Wilson-Modell](#)

6.6. Konkrete Modelle

1. Zufallsmodell: $B(W) = 1$

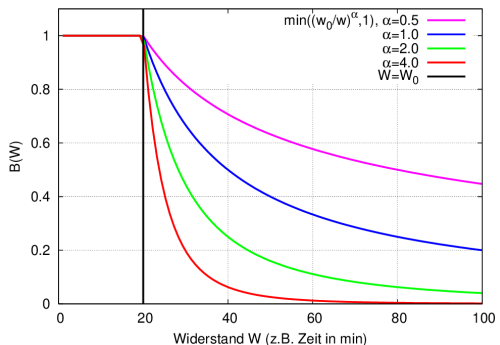
- ▶ Die Weglänge oder andere Widerstandsfaktoren spielen keine Rolle
- ▶ Nur für sehr kleine Untersuchungsgebiete und als akademische Spielerei
- ▶ Einziges Modell, in welchem unabhängig von der Art der RSB immer eine analytische Lösung vorliegt:

$$v_{ij} = \frac{V_{ij}}{V} = q_i z_j$$

- ? Stellen Sie einen Bezug zur statistischen Unabhängigkeit von Ereignissen dar!
- ! Da die q_i und z_j relative Quell- und Zielsummen darstellen bzw. ("Gesetz der großen Zahlen") die Wahrscheinlichkeit, dass im Untersuchungsgebiet eine Fahrt von Bezirk i beginnt bzw. in j endet, entspricht $v_{ij} = q_i z_j$ direkt der Definition der statistischen Unabhängigkeit: Wahrscheinlichkeit v_{ij} eines Weges von i nach j gleich des Produktes der Einzelereignisse "Start von i " und "Ziel in j "

Konkrete Modelle 2: Klassisches Gravitationsmodell

$$B(W) = \min \left[1, \left(\frac{W_0}{W} \right)^E \right] \quad \text{Gravitationsmodell}$$



Zwei

▶ Exponent E

Parameter:

▶ kritischer Widerstand W_0 , ab der die Bewertung abnimmt

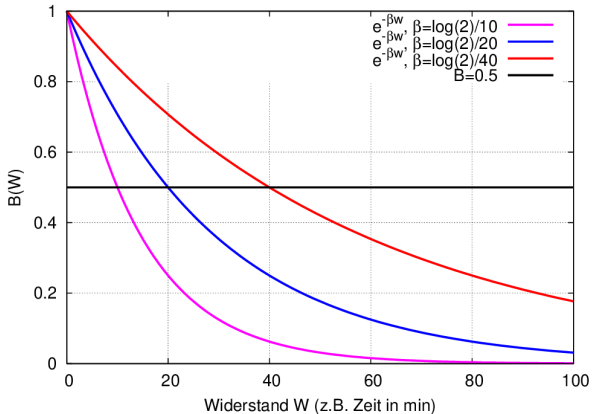
Der Name stammt vom Gravitationsgesetz der Physik $F_{\text{grav}} = \frac{\gamma m_1 m_2}{r^2}$ (Spezialfall $E = 2$)

? Stellen Sie den Bezug zwischen dem Gravitationsmodell und dem Gravitationsgesetz dar!

! Klassische Gravitation mit $\gamma = 1$ ergibt sich für $E = 2$, Widerstand gleich Entfernung und ohne die Beschränkung auf ≤ 1 . Die beiden Massen kann man grob mit den Quell- und Zielsummen vergleichen, die in der allgemeinen Lösung $v_{ij} = f_i g_j B(W_{ij})$ die dominante Rolle spielen (s.u.)

Konkrete Modelle 3: Wilson-Modell

$$B(W) = e^{-\beta W} \quad \text{Wilson-Modell}$$



Ein einziger Parameter: Abfallrate β bzw. kritischer Widerstand $W_0 = 1/\beta$

- ▶ Herleitung aus dem Prinzip der Entropiemaximierung \Rightarrow Skript)
- ▶ Hat die Form des **Logit-Modells** der Verkehrsmittelwahl \Rightarrow simultaner Ansatz
- ▶ nur ein Parameter
- ▶ ein einziger Nachteil: Zu große Sensitivität bei langen Wegen
- ? Zeigen Sie dies, indem Sie den Bewertungsunterschied zwischen 5 und 10 Minuten sowie 105 und 110 Minuten langen Wegen vergleichen (Widerstand=Zeit)
- ! Der Quotient ist im Modell, nicht aber in der Wirklichkeit, bei beiden Paaren der gleiche

Vergleich des Wilson-Modells mit der Empirie

Die [Empirie, Abschnitt 6.5](#) zeigt bei der Reiseweitenverteilung für jedes Verkehrsmittel (außer Fußwege) zunächst einen linearen Anstieg, dann einen exponentiellen Abfall.

Erklärung?

- ▶ Annahme freie RSB auf Quell- und Zielseite \Rightarrow Verkehrsstromanteil v_{ij} proportional $B_{ij}\tilde{q}_i\tilde{z}_j$ (siehe nächsten Abschnitt)
- ▶ Annahme homogene Stadt \Rightarrow Zieldichte als Funktion der Entfernung r steigt linear mit r (=Zahl der Bezirke in einem Ring mit Radius r und fester Breite)
- ▶ Für einen Modus steigt die Reisezeit $T(r)$ linear mit $r \Rightarrow$ Wilson-Bewertung $= e^{-r/r_0}$
- ▶ Bei jedem Startbezirk ist damit die Reiseweiten-Dichtefunktion proportional zur Zieldichte und zur Bewertungsfunktion

$$f(r) \propto r e^{-r/r_0}$$

\Rightarrow [Vergleich mit der Empirie](#)

6.7 Lösung der Modelle

Je nach QZG sind “harte” oder “weiche” RSB dem Sachverhalt angemessen:

- ▶ Wege verpflichtend (WA, AW, WB usw.): \Rightarrow beidseitig harte RSB
- ▶ nur Quell-Aktivität verpflichtend (WE, WS, AS usw.): \Rightarrow quellseitig hart und zielseitig weich/frei
- ▶ nur Ziel-Aktivität verpflichtend (EW, SW, SA usw.): \Rightarrow zielseitig hart und quellseitig weich/frei
- ▶ Quell- und Zielort wählbar (i.A. nur QZG “SS”) \Rightarrow beidseitig weich/frei

1. Quellseitig und zielseitig weich/frei

Die bei der Aktivitätenwahl berechneten Quell- und Zielsummen sind nur als Anhaltspunkt, also sog. **Quell- oder Zielpotential** anzusehen:

- ▶ Quellpotential \tilde{Q}_i bzw. $\tilde{q}_i = \tilde{Q}_i/V$: Zahlenwert wie die harten Summen Q_i bzw. q_i
- ▶ Zielpotential \tilde{Z}_i bzw. $\tilde{z}_i = \tilde{Z}_i/V$, ebenfalls gleiche Zahlenwerte

Einzige harte Restriktion: Vorgegebener Gesamtverkehr

$$\Rightarrow v_{ij} = \frac{B_{ij}\tilde{q}_i\tilde{z}_j}{\sum_{k,l} B_{kl}\tilde{q}_k\tilde{z}_l} \quad \text{quellseitig und zielseitig freie RSB}$$

? Zeigen Sie, dass die Restriktion $\sum_{ij} v_{ij} = 1$ erfüllt ist

Summe einsetzen und realisieren, dass die Summationsindices egal sind

? Zeigen Sie, dass diese Formel für das Zufallsmodell in die dort bereits angegebene Relation $v_{ij} = q_i z_j = \tilde{q}_i \tilde{z}_j$ übergeht

Die Summenbedingungen $\sum_k \tilde{q}_k = \sum_l \tilde{z}_l = 1$ berücksichtigen, \sum_l hinter \tilde{q}_k schieben

2. Einseitig harte RSB

Hier müssen die Summen einer Kategorie (Quell- oder Zielsummen) hart erfüllt sein und die jeweils andere frei

$$v_{ij} = \frac{B_{ij}q_i\tilde{z}_j}{\sum_k B_{ik}\tilde{z}_k} \quad \text{quellseitig harte, zieleseitig freie RSB}$$

$$v_{ij} = \frac{B_{ij}\tilde{q}_i z_j}{\sum_k B_{kj}\tilde{q}_k} \quad \text{zieleseitig harte, quellseitig freie RSB}$$

- ? Zeigen Sie, dass in obiger Gleichung die Quell- bzw. Zielsummen hart erfüllt sind
- ! Quellsummen: $\sum_j v_{ij} = (\sum_j B_{ij}q_i\tilde{z}_j)/(\sum_k B_{ik}\tilde{z}_k) = q_i(\sum_j B_{ij}\tilde{z}_j)/(\sum_k B_{ik}\tilde{z}_k) = q_i$ ✓
Untere Gleichung für die Zielsummen analog
- ? Zeigen Sie, dass diese Formel für das Zufallsmodell in die dort bereits angegebene Relation $v_{ij} = q_i\tilde{z}_j$ übergeht
- ! Einfach: $\sum_k \tilde{z}_k = \sum_k \tilde{q}_k = 1$

3. Beidseitig harte RSB

Grundmodell $v_{ij} = B_{ij}f_i g_j \Rightarrow$ bilineare Gleichungssystem für f_i und $g_j \Rightarrow$ nur iterativ zu lösen, indem man in den RSB $q_i = \sum_j v_{ij} = f_i \sum_j g_j B_{ij}$ und $z_j = \sum_i v_{ij} = g_j \sum_i f_i B_{ij}$ jeweils die letzte Info einsetzt:

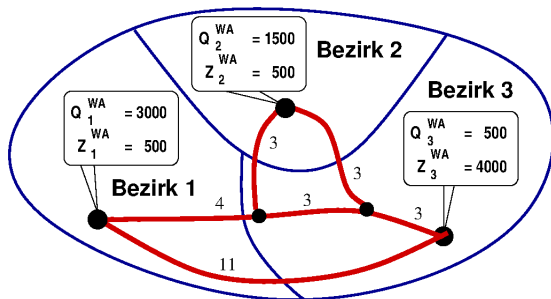
- ▶ Iteration 0 (Anfangswerte): $f_i^{(0)} = g_j^{(0)} = 1 \forall i, j$
- ▶ Iteration $m \geq 1$:

$$f_i^{(m)} = \frac{q_i}{\sum_j B_{ij} g_j^{(m-1)}}$$
$$g_j^{(m)} = \frac{z_j}{\sum_i B_{ij} f_i^{(m)}}$$

? Vertauscht man in jedem Iterationsschritt $m > 0$ die Reihenfolge, berechnet also zuerst $g_j^{(m)}$ aus $f_i^{(m-1)}$, dann $f_i^{(m)}$ aus $g_j^{(m)}$, konvergieren die f_i und g_j gegen *völlig andere* Werte. Dennoch sind die konvergierenden V_{ij} gleich und insbesondere die RSB erfüllt. Wie kann das sein?

! Da es nur auf das *Produkt* $f_i g_j$ ankommt, vgl. Tutorial 6.

Beispiel: Iterative Lösung des Wilson-Modells, $\beta = 0.1 \text{ min}^{-1}$



$$q_1 = 0.6, \quad q_2 = 0.3, \quad q_3 = 0.1,$$

$$z_1 = 0.1, \quad z_2 = 0.1, \quad z_3 = 0.8.$$

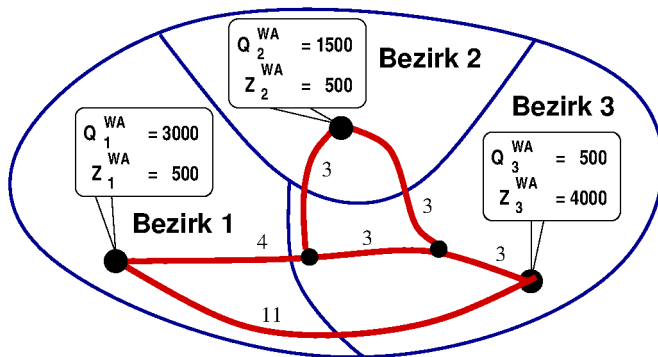
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0.4966 & 0.3679 \\ 0.4966 & 0 & 0.5488 \\ 0.3679 & 0.5488 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f_i^{(m)} = \frac{q_i}{\sum_j B_{ij} g_j^{(m-1)}}$$

$$g_j^{(m)} = \frac{z_j}{\sum_i B_{ij} f_i^{(m)}}$$

Iteration	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
0	$f_1 = 1$	$f_2 = 1$	$f_3 = 1$
0	$g_1 = 1$	$g_2 = 1$	$g_3 = 1$
1	$f_1 = 0.321808176647478$	$f_2 = 0.146670797315656$	$f_3 = 0.0521732485668318$
1	$g_1 = 0.241641497008773$	$g_2 = 0.298410105823893$	$g_3 = 3.18655908107113$
2	$f_1 = 0.384099031406901$	$f_2 = 0.138425776173922$	$f_3 = 0.0290763184178919$
2	$g_1 = 0.215733059387455$	$g_2 = 0.289753337754216$	$g_3 = 3.24743684082831$
3	$f_1 = 0.386029450360936$	$f_2 = 0.137670610406493$	$f_3 = 0.028687649604386$
3	$g_1 = 0.215077700082051$	$g_2 = 0.289761611156671$	$g_3 = 3.2486626136856$
4	$f_1 = 0.386079207727287$	$f_2 = 0.137648151373062$	$f_3 = 0.028679510817527$
4	$g_1 = 0.21506122851403$	$g_2 = 0.289763472532253$	$g_3 = 3.24869110728804$

Ergebnis der Rechnung für die beidseitig harten RSB



Verkehrstrommatrix $V_{ij} = VB_{ij}f_{ij}$:

Wilson:

V_{ij}	1	2	3	Q_i
1	415	278	2 307	3 000
2	74	199	1 227	1 500
3	11	23	466	500
Z_j	500	500	4 000	5 000

Vgl Zufall:

V_{ij}	1	2	3	Q_i
1	300	300	2 400	3 000
2	150	150	1 200	1 500
3	50	50	400	500
Z_j	500	500	4 000	5 000

