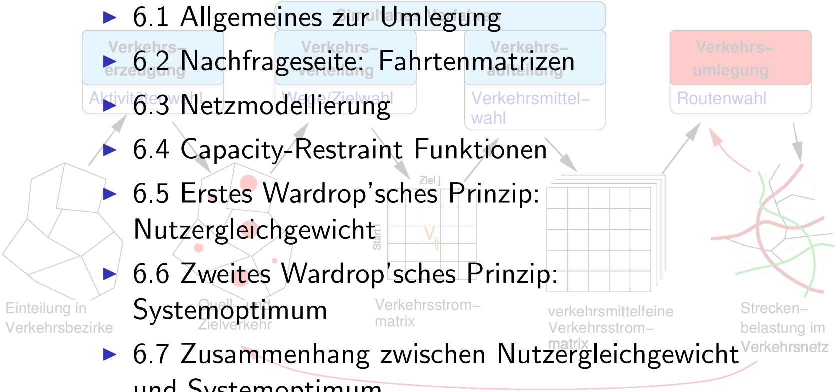
6. Routenwahl bzw. Umlegung

- 6.1 Allgemeines zur Umlegung
- 6.2 Nachfrageseite: Fahrtenmatrizen
- 6.3 Netzmodellierung
- 6.4 Capacity-Restraint Funktionen
- 6.5 Erstes Wardrop'sches Prinzip: Nutzergleichgewicht
- 6.6 Zweites Wardrop'sches Prinzip: Systemoptimum
- 6.7 Zusammenhang zwischen Nutzergleichgewicht und Systemoptimum
- 6.8 Fun Fact: Das Braess'sche Paradoxon

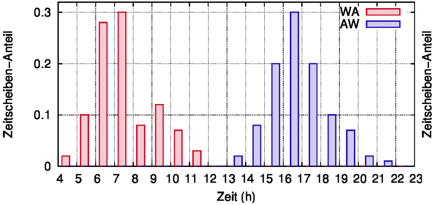


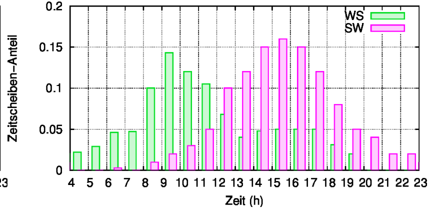
6.1 Allgemeines zur Umlegung

In der **Umlegung** werden die einzelnen Elemente der Verkehrsnachfrage auf die Routenalternativen des *konkreten Verkehrsnetzes* aufgeteilt ("umgelegt")

- Die Umlegung beinhaltet die **Angebotsmodellierung**, die drei vorhergehenden Schritte Verkehrserzeugung, -verteilung und -aufteilung die **Nachfragemodellierung**
- Nachfrage: Verkehrsstrommatrizen $V_{ijk} \Rightarrow$ Aggregierung und Disaggregierung $\Rightarrow$ **Fahrtenmatrizen**
- Angebot: das aus Straßen und ÖV-Linien bestehende **Strecken-Netzwerk**
- Kopplung der Nachfrage an das Angebot über **Anbindungsknoten**
- Umlegung $\hat{=}$ Findung des "Marktgleichgewichts". Der mit der Nachfrage steigende "Preis" wird in Form von Reiszeit durch **Capacity-Restraint-Funktionen** modelliert

6.2 Nachfrageseite: Fahrtenmatrizen

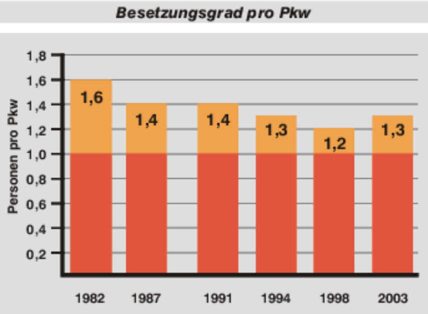




- Interesse an Rush-Hours $\Rightarrow$ Disaggregierung der Verkehrsstrommatrizen durch die **Tagesganglinien** $f^g_{\mathsf{TGL}}(t)$: $V^g_{ijk}(t) = V^g_{ijk} f^g_{\mathsf{TGL}}(t)$
- Fahrten, nicht Wege sind für den Stau relevant (nur MIV): $F^g_{ijk}(t) = V^g_{ijk}(t)/b^g_k$, b^g_k : mittlere Fahrzeugbelegung
- Sowohl der Tourist als auch der Manager stehen im Stau: Aggregierung über die QZG $F_{ijk}(t) = \sum_g F^g_{ijk}(t)$
- Alles zusammen:

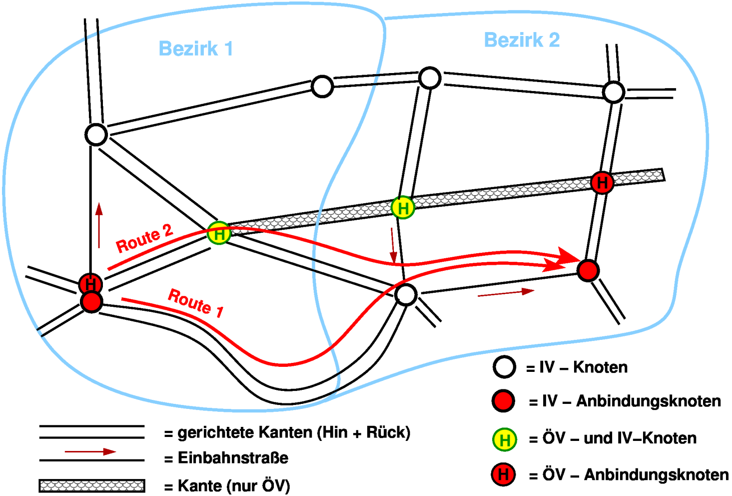
$$\boxed{F_{ijk}(t) = \sum_g V^g_{ijk}(t)/b^g_k \, f^g_{\mathsf{TGL}}(t)}$$

6.2 Nachfrageseite: Fahrtenmatrizen



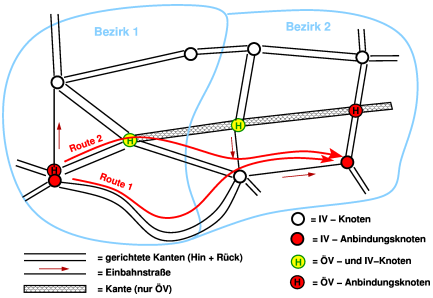
- ? Welche Größenordnung hat b^g_{Rad}?
- ? Warum muss man zuerst disaggregieren und dann aggregieren?
- ? Warum ist die Aggregierung verschiedener IV-Modi wie Fuß, Rad und MIV zum System “IV” (im Modal Split werden also nur zwei Modi unterschieden) problematisch bzw. inkonsistent?

6.3 Netzmodellierung



Netz $\hat{=}$ **gerichteter Graph** aus Knoten und Kanten (*nodes* n and *links* l)

Attribute der Netzelemente



- Separate Netze für IV und ÖV: Knoten sind Kreuzungen bzw Haltestellen und Kanten Straßenabschnitte bzw. die Strecke zwischen benachbarten Haltestellen
- Attribute Knoten: Abbiegebeziehungen und Status **Anbindungsknoten** oder nicht
- Attribute der Kanten l: Länge L_l, Max-Geschwindigkeit v_{0l} bzw. Minimumszeit T_{0l}, Kapazität K_l

6.4 Capacity-Restraint Funktionen

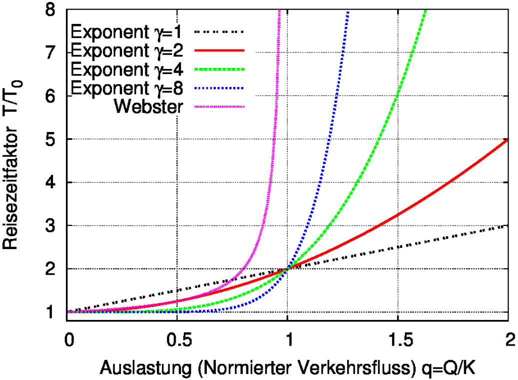
Die **Capacity-Restraint Funktion** bzw **CR Funktion** (deutsch: Kapazitätsbeschränkungsfunktion) $T_l(Q)$ gibt summarisch-makroskopisch die Verlängerung der Reisezeit mit der Verkehrsbelastung einer Kante an.

- Plausibilitätsbedingungen:

$$T_l(0) = T_{l0}, \quad T_l'(Q) \geq 0, \quad \lim_{Q\to\infty} T_l(Q) \to \infty, \quad T_l''(Q) \geq 0 \text{ (option}$$

- Die CR-Funktionen modellieren *keine* Dynamik und auch kein Fließgleichgewicht
- Oft gilt $T_l(K_l) = 2T_{l0}$
- ? Warum wäre im Fließgleichgewicht $T_l(Q)$ für $Q > K_l$ nicht definiert?

BPR (Bureauf of Public Roads) CR-Funktion



$$T_l(Q) = T_{l0}\left[1+\left(\frac{Q}{K_l}\right)^{\gamma}\right] = T_{l0}(1+q^{\gamma})$$

- ? Erläutern Sie die Parameter der BPR CR-Funktion
- ? Eine 1 km lange Kante mit einem Tempolimit von 30 km habe einen mit der Belastung linearen Anstieg der Reisezeit. Wie sind die Parameter?

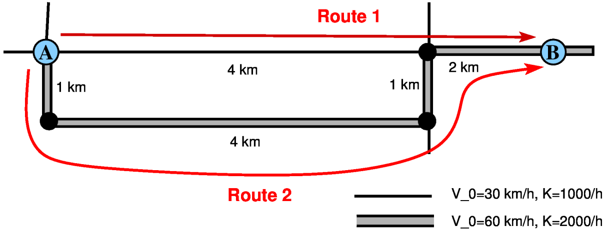
6.5 Erstes Wardrop'sches Prinzip: Nutzergleichgewicht

Erstes Wardrop'sches Prinzip: Unter schwachen Bedingungen (monoton steigende CR-Funktionen) gibt es ein eindeutiges und stabiles **Nutzergleichgewicht** (*user equilibrium*, UE), in welchem die Reisezeiten aller befahrenen Routen gleich und minimal sind.

$$T_r^{(\mathrm{m})} = \begin{cases} T_{\mathrm{min}}^{(m)} & \text{falls } F_{m,r} = F_m w_r > 0, \\ > T_{\mathrm{min}}^{(m)} & \text{falls } F_{m,r} = w_r = 0. \end{cases}$$

- $m = \{ijkt\}$: betrachtetes Fahrtenmatrixelement
- r: Route = Folge von Links vom Start- zum Zielanbindungsknoten
- T_r: Reisezeit (allgemein: Disutility bzw Widerstand) der Route r (link-additiv),
- T_{min}: Mindestreisezeit bzw. -widerstand aller Routen
- w_r: Anteil des Fahrtenmatrixelements, welcher auf die Route r umgelegt wurde

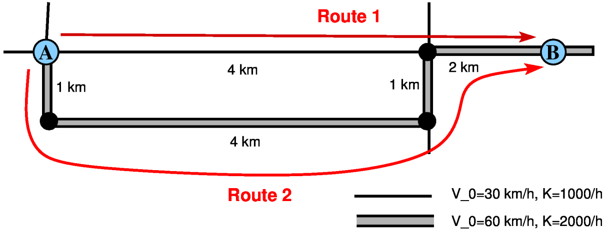
Beispiel zum ersten Wardrop'sches Prinzip



- ▶ Zwei Routen von A nach B (entspricht $m = \{ijkt\}$ mit 2 bzw. 4 Kanten)
- ? Bestimme die Reisezeiten als Funktion der Nachfragen Q_1 und Q_2 auf beiden Routen
- ! Beachte, dass beide Routen die letzten Kante gemeinsam haben $\Rightarrow$ Koppelung:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{4\,\text{km}}{V_{01}}\left(1+\frac{Q_1}{K_1}\right)+\frac{2\,\text{km}}{V_{02}}\left(1+\frac{Q_1+Q_2}{K_2}\right), \\ T_2 &= \frac{6\,\text{km}}{V_{02}}\left(1+\frac{Q_2}{K_2}\right)+\frac{2\,\text{km}}{V_{02}}\left(1+\frac{Q_1+Q_2}{K_2}\right) \end{aligned}$$

Beispiel zum ersten Wardrop'sches Prinzip



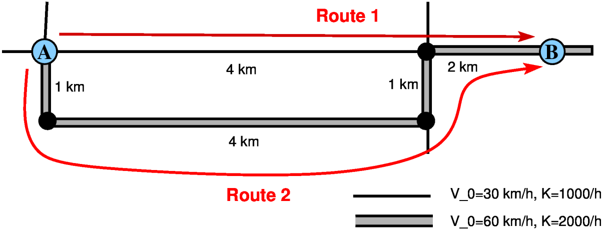
? Nutzen Sie die Summenbedingung $Q_1 + Q_2 = Q_{\text{AB}}$ und drücken Sie T_1 und T_2 in Minuten als Funktion von $q = Q_{\text{AB}}/K_1$ und den Routenanteil w_1 aus

! Ersetze $Q_1 = Q_{\text{AB}} w_1 = qK_1 w_1$ sowie $Q_2 = Q_{\text{AB}}(1 - w_1) = qK_1(1 - w_1)w$ und berechne (in Minuten): $\frac{4\,\text{km}}{V_{01}} = 8$, $\frac{2\,\text{km}}{V_{02}} = 2$ und $\frac{6\,\text{km}}{V_{02}} = 6$

$\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
T_1(q, w_1) &= \frac{4\,\text{km}}{V_{01}}(1 + qw_1) + \frac{2\,\text{km}}{V_{02}}(1 + q/2) &&= 10 + 8qw_1 + q, \\
T_2(q, w_1) &= \frac{6\,\text{km}}{V_{02}}(1 + q(1 - w_1)/2) + \frac{2\,\text{km}}{V_{02}}(1 + q/2) &&= 8 - 3qw_1 + 4q
\end{aligned}
$$

Beispiel zum ersten Wardrop'sches Prinzip



? Berechnen Sie nun die Aufteilung im Nutzergleichgewicht

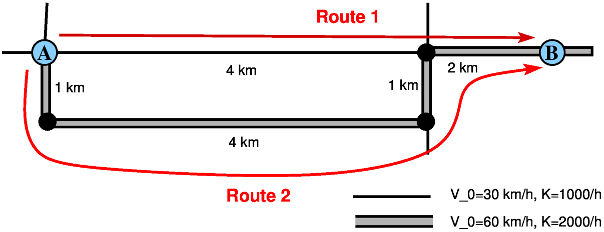
! Gehe zunächst von $0 < w_1 < 1$ aus und wende die *Gleichheitsbedingung* ("alle befahrenen Routen haben dieselbe Reisezeit") an:

$$T_1(q, w_1) = T_2(q, w_1) \quad \rightarrow \quad w_1(q) = \frac{3q-2}{11q}$$

! Teste nun, wann $0 < w_1 < 1$ verletzt ist: Falls $q < 2/3$, ist $w_1 < 0$ bzw. (Ungleichheitsbedingung) $w_1 = 0$ und $T_1 > T_2 \Rightarrow$ Zusammen:

$$w_1^{\text{UE}}(q) = \begin{cases} \frac{3q-2}{11q} & \text{falls } q \geq \frac{2}{3} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}, \quad w_2^{\text{UE}}(q) = 1 - w_1^{\text{UE}}(q),$$

Beispiel zum ersten Wardrop'sches Prinzip



? Geben Sie schließlich die Reisezeiten im UE an

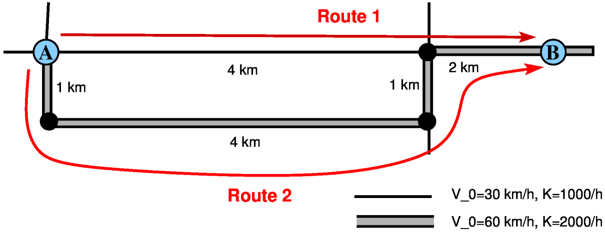
! Die Reisezeiten sind nur für befahrene Routen relevant, dann gilt

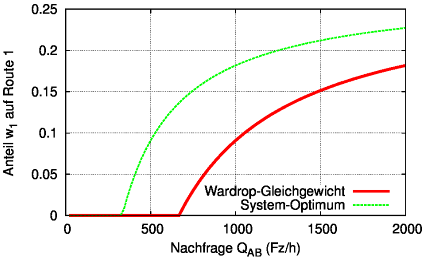
$$T^{\text{UE}}(q) = T_r(w_r^{\text{UE}}(q)) \mid 0 < w_r^{\text{UE}}(q) \leq 1$$

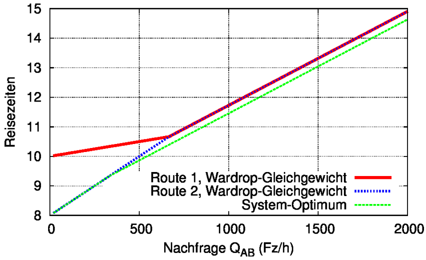
also

$$T^{\text{UE}}(q) = \begin{cases} \frac{94+35q}{11} & q \geq \frac{2}{3} \\ 8 + 4q & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel zum ersten Wardrop'sches Prinzip: Ergebnisse







6.6 Zweites Wardrop'sches Prinzip: Systemoptimum

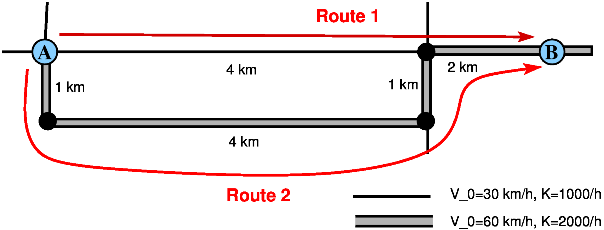
Zweites Wardrop'sches Prinzip: Unter schwachen Bedingungen (monoton steigende CR-Funktionen) gibt es einen eindeutiges **Systemoptimum** (*system optimum*, SO), welcher den Gesamtnutzen aller Verkehrsteilnehmer maximiert.

Spezialfall: Umlegung des Fahrtenmatrixelements F_{AB} wird zur Minimierungsaufgabe für $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, ...)^{\mathsf{T}}$:

$$\begin{array}{ll} T_{\mathsf{sys}}(\boldsymbol{w}) = & \sum_r w_r T_r(F_{\mathsf{AB}} \boldsymbol{w}) = \min_{\boldsymbol{w}}! \\ \text{s.t.} & \sum_r w_r = 1, \quad \text{sowie} \quad 0 \le w_r \le 1 \quad \text{für alle } r. \end{array}$$

- Das Systemoptimum (SO) entspricht i.A. nicht dem UE. Insbesondere ist es kein Gleichgewichtszustand, nicht einmal ein instabiler.
- Das Dilemma am Systemoptimum ist, dass es nicht für alle *individuellen* Verkehrsteilnehmer vorteilhaft ist. Es muss vielmehr extern erzwungen werden

Beispiel zum zweiten Wardrop'sches Prinzip



$$\begin{aligned} T_1(q, w_1) &= 10 + 8qw_1 + q, \\ T_2(q, w_1) &= 8 - 3qw_1 + 4q \end{aligned}$$

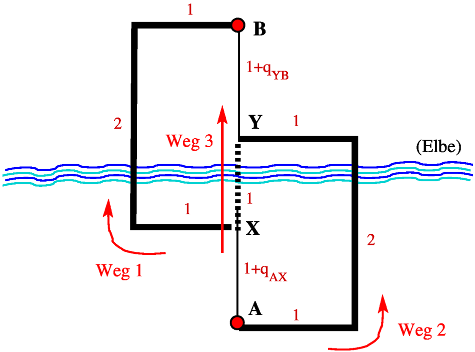
$$\begin{aligned} T_{\text{sys}}(\boldsymbol{w}) &= w_1 T_1(q, w_1) + w_2 T_2(q, w_1) \\ &= w_1 T_1(q, w_1) + (1 - w_1) T_2(q, w_1) \\ &= 11 q w_1^2 + (2 - 6q) w_1 + 8 + 4q \stackrel{!}{=} \min_{w_1} \\ T'_{\text{sys}}(w_1) &= 22 q w_1 + 2 - 6q \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \\ w_1^{\text{SO}} &= \begin{cases} \frac{3q-1}{11q} & q \leq \frac{1}{3} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

6.7 Zusammenhang zwischen Nutzergleichgewicht und Systemoptimum

Nicht dieses Jahr (Sommersemester 2020)

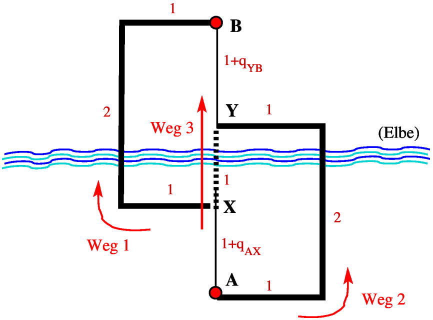
6.8 Fun Fact: Das Braess'sche Paradoxon

Braess Paradoxon: Das Erweitern oder Hinzufügen von Straßen kann die Reisezeit bzw. den Nutzen im UE *für alle* verschlechtern.



- Das Paradox kann auftreten, wenn eine neu eröffnete Strecke (Route 3) (i) sehr kurz ist, (ii) viele Kanten geringer Kapazität hat, (iii) diese Kanten auch von den anderen Routen benutzt werden
- kurz ⇒ viele wählen R3 ⇒ mehr Verkehr auf kleinen Straßen ⇒ Zeitverlust für alle

Das Braess'sche Paradoxon: Rechenbeispiel

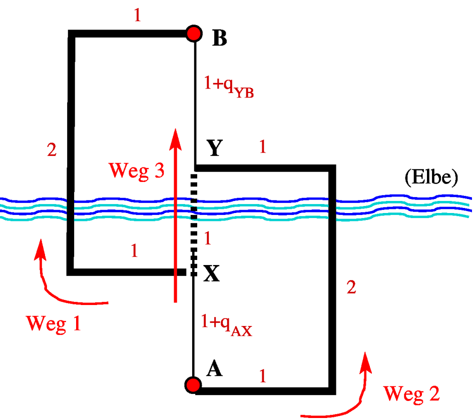


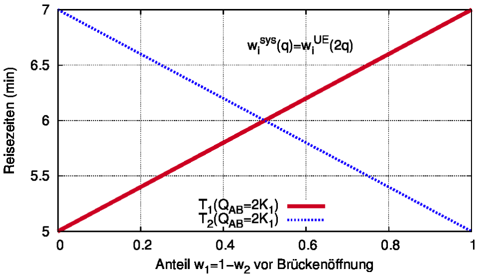
Symmetrie: $w_1 = w_2$; Summenbedingung: $w_1 + w_2 + w_3 = 1$

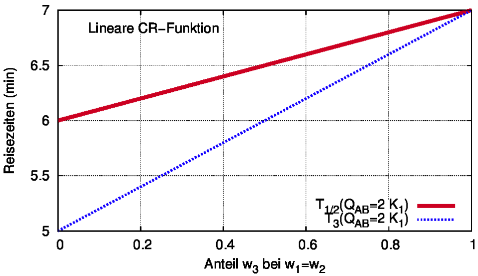
$$\Rightarrow \; w_1 = w_2 = (1 - w_3)/2$$

$$\begin{aligned}
T_1 &= 5 + (w_1 + w_3)q & &= 5 + (1 + w_3)q/2, \\
T_2 &= 5 + (w_2 + w_3)q & &= 5 + (1 + w_3)q/2, \\
T_3 &= 3 + (w_1 + w_3 + w_2 + w_3)q & &= 3 + (1 + w_3)q
\end{aligned}$$

Das Braess'sche Paradoxon: Ergebnis des Rechenbeispiels







Das Braess'sche Paradoxon: Ergebnis des Rechenbeispiels