

# Verkehrsökonomie Bachelor-Kurs

## Vorlesung 02: Mathematische Modelle

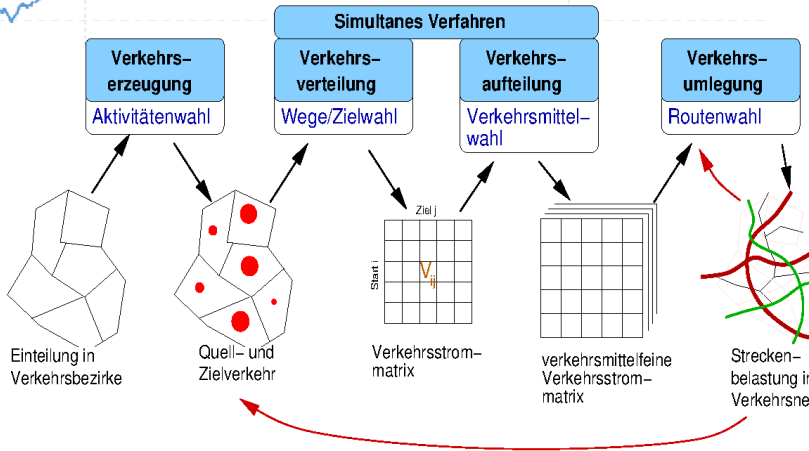
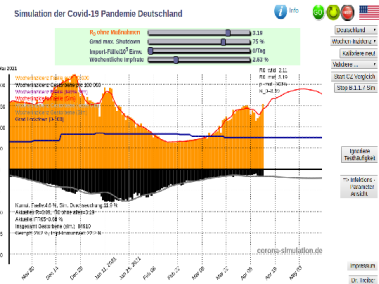
10,000

1,000

100



Simulation der Covid-19 Pandemie Deutschland



## 2. Mathematische Modelle

Zur Erinnerung: Mathematische Modell  $\Rightarrow$  **Modellfunktion**

$$f(\tilde{x}, \beta) + \epsilon$$

- ▶ Die Modellfunktion selbst ( $f$ , ggf  $\epsilon$ ) bestimmt die qualitativen Aspekte
- ▶  $\tilde{x}$  sind die exogenen Variablen, die meist in Faktoren  $x$  zusammengefasst werden (s.u.)
- ▶  $\beta$  sind die Modellparameter, die das Modell quantitativ einstellen
- ▶  $\epsilon$  die unbestimmten bzw. Zufallsanteile

Hier geht es nun um die Modellfunktion und mögliche Arten:

- ▶ Ein- oder Mehrgleichungsmodelle (Komponentenzahl von  $f$  gleich #endogener Variablen)
- ▶ linear vs. nichtlinear
- ▶ deterministisch ( $\epsilon = 0$ ) vs. stochastisch
- ▶ interne Abhängigkeitsstrukturen: Modell besteht aus mehreren verketteten, gekoppelten oder rückgekoppelten Teilmodellen

*Mach es so einfach wie möglich, aber nicht einfacher* (Einstein)



## 2. Mathematische Modelle

Zur Erinnerung: Mathematische Modell  $\Rightarrow$  **Modellfunktion**

$$f(\tilde{x}, \beta) + \epsilon$$

- ▶ Die Modellfunktion selbst ( $f$ , ggf  $\epsilon$ ) bestimmt die qualitativen Aspekte
- ▶  $\tilde{x}$  sind die exogenen Variablen, die meist in Faktoren  $x$  zusammengefasst werden (s.u.)
- ▶  $\beta$  sind die Modellparameter, die das Modell quantitativ einstellen
- ▶  $\epsilon$  die unbestimmten bzw. Zufallsanteile

Hier geht es nun um die Modellfunktion und mögliche Arten:

- ▶ Ein- oder Mehrgleichungsmodelle (Komponentenzahl von  $f$  gleich #endogener Variablen)
- ▶ linear vs. nichtlinear
- ▶ deterministisch ( $\epsilon = 0$ ) vs. stochastisch
- ▶ interne Abhängigkeitsstrukturen: Modell besteht aus mehreren verketteten, gekoppelten oder rückgekoppelten Teilmodellen

*Mach es so einfach wie möglich, aber nicht einfacher (Einstein)*

## 2. Mathematische Modelle

Zur Erinnerung: Mathematische Modell  $\Rightarrow$  **Modellfunktion**

$$f(\tilde{x}, \beta) + \epsilon$$

- ▶ Die Modellfunktion selbst ( $f$ , ggf  $\epsilon$ ) bestimmt die qualitativen Aspekte
- ▶  $\tilde{x}$  sind die exogenen Variablen, die meist in Faktoren  $x$  zusammengefasst werden (s.u.)
- ▶  $\beta$  sind die Modellparameter, die das Modell quantitativ einstellen
- ▶  $\epsilon$  die unbestimmten bzw. Zufallsanteile

Hier geht es nun um die Modellfunktion und mögliche Arten:

- ▶ Ein- oder Mehrgleichungsmodelle (Komponentenzahl von  $f$  gleich #endogener Variablen)
- ▶ linear vs. nichtlinear
- ▶ deterministisch ( $\epsilon = 0$ ) vs. stochastisch
- ▶ interne Abhängigkeitsstrukturen: Modell besteht aus mehreren verketteten, gekoppelten oder rückgekoppelten Teilmodellen

*Mach es so einfach wie möglich, aber nicht einfacher (Einstein)*

## 2. Mathematische Modelle

Zur Erinnerung: Mathematische Modell  $\Rightarrow$  **Modellfunktion**

$$f(\tilde{x}, \beta) + \epsilon$$

- ▶ Die Modellfunktion selbst ( $f$ , ggf  $\epsilon$ ) bestimmt die qualitativen Aspekte
- ▶  $\tilde{x}$  sind die exogenen Variablen, die meist in Faktoren  $x$  zusammengefasst werden (s.u.)
- ▶  $\beta$  sind die Modellparameter, die das Modell quantitativ einstellen
- ▶  $\epsilon$  die unbestimmten bzw. Zufallsanteile

Hier geht es nun um die Modellfunktion und mögliche Arten:

- ▶ Ein- oder Mehrgleichungsmodelle (Komponentenzahl von  $f$  gleich #endogener Variablen)
- ▶ linear vs. nichtlinear
- ▶ deterministisch ( $\epsilon = 0$ ) vs. stochastisch
- ▶ interne Abhängigkeitsstrukturen: Modell besteht aus mehreren verketteten, gekoppelten oder rückgekoppelten Teilmodellen

*Mach es so einfach wie möglich, aber nicht einfacher* (Einstein)

## 2. Mathematische Modelle

Zur Erinnerung: Mathematische Modell  $\Rightarrow$  **Modellfunktion**

$$f(\tilde{x}, \beta) + \epsilon$$

- ▶ Die Modellfunktion selbst ( $f$ , ggf  $\epsilon$ ) bestimmt die qualitativen Aspekte
- ▶  $\tilde{x}$  sind die exogenen Variablen, die meist in Faktoren  $x$  zusammengefasst werden (s.u.)
- ▶  $\beta$  sind die Modellparameter, die das Modell quantitativ einstellen
- ▶  $\epsilon$  die unbestimmten bzw. Zufallsanteile

Hier geht es nun um die Modellfunktion und mögliche Arten:

- ▶ Ein- oder Mehrgleichungsmodelle (Komponentenzahl von  $f$  gleich #endogener Variablen)
- ▶ linear vs. nichtlinear
- ▶ deterministisch ( $\epsilon = 0$ ) vs. stochastisch
- ▶ interne Abhängigkeitsstrukturen: Modell besteht aus mehreren verketteten, gekoppelten oder rückgekoppelten Teilmodellen

*Mach es so einfach wie möglich, aber nicht einfacher* (Einstein)





## 2. Mathematische Modelle

Zur Erinnerung: Mathematische Modell  $\Rightarrow$  **Modellfunktion**

$$f(\tilde{x}, \beta) + \epsilon$$

- ▶ Die Modellfunktion selbst ( $f$ , ggf  $\epsilon$ ) bestimmt die qualitativen Aspekte
- ▶  $\tilde{x}$  sind die exogenen Variablen, die meist in Faktoren  $x$  zusammengefasst werden (s.u.)
- ▶  $\beta$  sind die Modellparameter, die das Modell quantitativ einstellen
- ▶  $\epsilon$  die unbestimmten bzw. Zufallsanteile

Hier geht es nun um die Modellfunktion und mögliche Arten:

- ▶ Ein- oder Mehrgleichungsmodelle (Komponentenzahl von  $f$  gleich #endogener Variablen)
- ▶ linear vs. nichtlinear
- ▶ deterministisch ( $\epsilon = 0$ ) vs. stochastisch
- ▶ interne Abhängigkeitsstrukturen: Modell besteht aus mehreren verketteten, gekoppelten oder rückgekoppelten Teilmodellen

*Mach es so einfach wie möglich, aber nicht einfacher* (Einstein)





## 2.1 Ein- vs. Mehrgleichungsmodelle

Die Zahl der Gleichungen ist gleich der Zahl der (wesentlichen) endogenen Variablen

- ▶ Hat man nur eine endogene Variable  $Y$  wie bei Regressionsmodellen, reduziert sich im resultierenden **Eingleichungsmodell** die Funktion  $f(\cdot)$  auf eine gewöhnliche skalare Funktion  $f(\cdot)$
- ▶ **Lineares** Modell oder Modell ohne **Kopplung** der endogenen Variablen  $\Rightarrow$  ein Modell für  $K > 1$  endogene Variable zerfällt in  $K$  Eingleichungsmodelle
- ▶ Beispiel Eingleichungsmodell: Verkehrsstärke als Funktion der Tageszeit, Verbrauch als Funktion der Geschwindigkeit, Beschleunigung und Steigung
- ▶ Beispiel **Mehrgleichungsmodell**: diskrete Wahlentscheidungen.
  - ▶ Die mikroskopischen endogenen Variablen  $Y_k \in \{0, 1\}$  sind über die Bedingung  $\sum_k Y_k = 1$  gekoppelt bzw. aggregiert
  - ▶ Die makroskopischen Wahrscheinlichkeiten  $P_k(x, \beta)$  sind ebenfalls durch  $\sum_k P_k = 1$  gekoppelt

## 2.1 Ein- vs. Mehrgleichungsmodelle

Die Zahl der Gleichungen ist gleich der Zahl der (wesentlichen) endogenen Variablen

- ▶ Hat man nur eine endogene Variable  $Y$  wie bei Regressionsmodellen, reduziert sich im resultierenden **Eingleichungsmodell** die Funktion  $f(\cdot)$  auf eine gewöhnliche skalare Funktion  $f(\cdot)$
- ▶ **Lineares** Modell oder Modell ohne **Kopplung** der endogenen Variablen  $\Rightarrow$  ein Modell für  $K > 1$  endogene Variable zerfällt in  $K$  Eingleichungsmodelle
- ▶ Beispiel Eingleichungsmodell: Verkehrsstärke als Funktion der Tageszeit, Verbrauch als Funktion der Geschwindigkeit, Beschleunigung und Steigung
- ▶ Beispiel **Mehrgleichungsmodell**: diskrete Wahlentscheidungen.
  - ▶ Die mikroskopischen endogenen Variablen  $Y_k \in \{0, 1\}$  sind über die Bedingung  $\sum_k Y_k = 1$  gekoppelt bzw. aggregiert
  - ▶ Die makroskopischen Wahrscheinlichkeiten  $P_k(x, \beta)$  sind ebenfalls durch  $\sum_k P_k = 1$  gekoppelt

## 2.1 Ein- vs. Mehrgleichungsmodelle

Die Zahl der Gleichungen ist gleich der Zahl der (wesentlichen) endogenen Variablen

- ▶ Hat man nur eine endogene Variable  $Y$  wie bei Regressionsmodellen, reduziert sich im resultierenden **Eingleichungsmodell** die Funktion  $f(\cdot)$  auf eine gewöhnliche skalare Funktion  $f(\cdot)$
- ▶ **Lineares** Modell oder Modell ohne **Kopplung** der endogenen Variablen  $\Rightarrow$  ein Modell für  $K > 1$  endogene Variable zerfällt in  $K$  Eingleichungsmodelle
- ▶ Beispiel Eingleichungsmodell: Verkehrsstärke als Funktion der Tageszeit, Verbrauch als Funktion der Geschwindigkeit, Beschleunigung und Steigung
- ▶ Beispiel **Mehrgleichungsmodell**: diskrete Wahlentscheidungen.
  - ▶ Die mikroskopischen endogenen Variablen  $Y_k \in \{0, 1\}$  sind über die Bedingung  $\sum_k Y_k = 1$  gekoppelt bzw. aggregiert
  - ▶ Die makroskopischen Wahrscheinlichkeiten  $P_k(x, \beta)$  sind ebenfalls durch  $\sum_k P_k = 1$  gekoppelt













## 2.2.2 Beispiel 1: Jährliche Kilometerleistung mit dem Kfz

- ▶  $y$ : Kilometerleistung (deterministisch, da “mittlere”),  
 $\tilde{x}_1$ : Einkommen [€/Jahr],  $\tilde{x}_2$ : Spritkosten [€/Liter]

$$\begin{aligned} x_0 &= g_0(\tilde{x}) = 1, \\ x_1 &= g_1(\tilde{x}) = \tilde{x}_1, \\ x_2 &= g_2(\tilde{x}) = \tilde{x}_2, \\ x_3 &= g_3(\tilde{x}) = \tilde{x}_1\tilde{x}_2 \end{aligned}$$

- ▶ Zwei exogene Variable  $\Rightarrow$  vier Faktoren:

$$\Rightarrow \text{Modell: } y = \beta_0 + \beta_1\tilde{x}_1 + \beta_2\tilde{x}_2 + \beta_3\tilde{x}_1\tilde{x}_2 = \sum_{j=0}^3 \beta_j x_j$$

? Diskutiere die Elastizität  $\epsilon_2 = \frac{\tilde{x}_2}{y} \frac{dy}{dx_2} = \frac{\beta_2\tilde{x}_2}{y} = -0.15$

! 0.15% Reduzierung der Kilometerleistung um 0.15% pro Preisanstieg um 1%

? Diskutiere die Bedeutung der Faktoren, insbesondere das Produkt  $\tilde{x}_1\tilde{x}_2$

!  $x_0 = 1$ : Konstante (Achsenabschnitt);  $x_1 = \tilde{x}_1$ : Erhöhung der Kilometerleistung mit dem Einkommen ( $\beta_1 > 0$  erwartet);  $x_2 = \tilde{x}_2$ : Preissensitivität ( $\beta_2 < 0$ );  $x_3 = \tilde{x}_1\tilde{x}_2$ : Erhöhung der Preissensitivität (im Sinne weniger negativer Werte) mit dem Einkommen: Sensitivität  $\beta_2 + \beta_3\tilde{x}_1$  ( $\beta_3 > 0$  erwartet)











## 2.2.2 Beispiel 1: Jährliche Kilometerleistung mit dem Kfz

- ▶  $y$ : Kilometerleistung (deterministisch, da "mittlere"),  
 $\tilde{x}_1$ : Einkommen [€/Jahr],  $\tilde{x}_2$ : Spritkosten [€/Liter]

- ▶ Zwei exogene Variable  $\Rightarrow$  vier Faktoren:

$$x_0 = g_0(\tilde{\mathbf{x}}) = 1,$$

$$x_1 = g_1(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{x}_1,$$

$$x_2 = g_2(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{x}_2,$$

$$x_3 = g_3(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{x}_1 \tilde{x}_2$$

$$\Rightarrow \text{Modell: } y = \beta_0 + \beta_1 \tilde{x}_1 + \beta_2 \tilde{x}_2 + \beta_3 \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 = \sum_{j=0}^3 \beta_j x_j$$

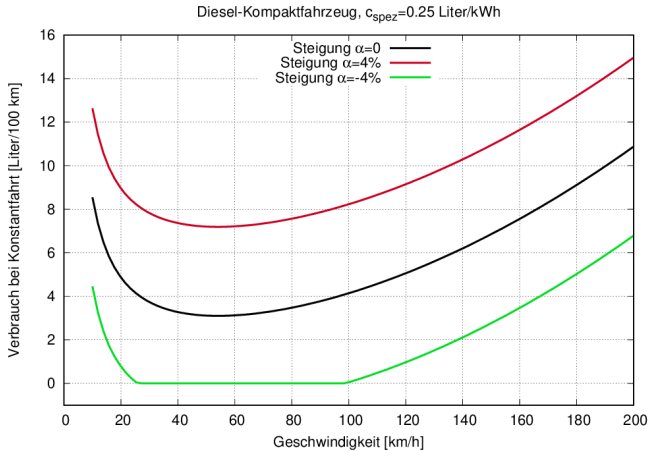
? Diskutiere die Elastizität  $\epsilon_2 = \frac{\bar{x}_2}{\bar{y}} \frac{dy}{dx_2} = \frac{\beta_2 \bar{x}_2}{y} = -0.15$

! 0.15 % Reduzierung der Kilometerleistung um 0.15 % pro Preisanstieg um 1 %

? Diskutiere die Bedeutung der Faktoren, insbesondere das Produkt  $\tilde{x}_1 \tilde{x}_2$

!  $x_0 = 1$ : Konstante (Achsenabschnitt);  $x_1 = \tilde{x}_1$ : Erhöhung der Kilometerleistung mit dem Einkommen ( $\beta_1 > 0$  erwartet);  $x_2 = \tilde{x}_2$ : Preissensitivität ( $\beta_2 < 0$ );  $x_3 = \tilde{x}_1 \tilde{x}_2$ : Erhöhung der Preissensitivität (im Sinne weniger negativer Werte) mit dem Einkommen: Sensitivität  $\beta_2 + \beta_3 \tilde{x}_1$  ( $\beta_3 > 0$  erwartet)

## 2.2.2 Beispiel 2: Treibstoffverbrauch



- ▶  $y$ : Verbrauch [l/100 km]
- ▶  $\tilde{x}_1$ : Geschwindigkeit  $v$  [m/s]
- ▶  $\tilde{x}_2$ : Steigung  $\alpha$  [rad]  
(1% entspricht  $\tilde{x}_2 = 0.01$ )
- ▶ Modell aus der Physik: Verbrauch  $y = cP(v, \alpha)/v$  mit  $c$  fester Konstante und Leistung

$$P(v, \alpha) = P_0 + mg(\mu + \alpha)v + \frac{1}{2}c_w \rho A v^3$$

- ▶ Damit Modell mit physikbestimmten nichtlin. Funktionen  $g_j(\tilde{x})$ :

$$y(\tilde{x}) = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{\tilde{x}_1} + \beta_2 \tilde{x}_1^2 + \beta_3 \tilde{x}_2$$

? Wie hängen die Modellparameter mit den physikalischen Parametern zusammen?

!  $\beta_0 = c P_0$ ,  $\beta_1 = c P_0 v$ ,  $\beta_2 = c/2c_w \rho A$ ,  $\beta_3 = c m g$

? Was ist mit der grünen Kurve in der Mitte los?

































### 2.2.3 Linear vs. nichtlinear: **reduzibel nichtlinear**

Die Zusammenfassung in Faktoren transformiert die *exogenen* Variablen. Analog kann man manchmal auch die *endogenen* Variablen transformieren, um Linearität zu erreichen. Klassiker ist das

**Modell für unbeschränktes Wachstum**  $G(t) = G_0 e^{rt+\epsilon}$

- ▶ Urprüngliche endogene Variable  $G$ : Wachstumsmerkmal, z.B. Umsatz oder Gewinn von Firmen, Aktienkurse, BIP, Infektionszahlen ohne jede Herdenimmunität
- ▶ Exogene Variable: Zeit  $t$
- ▶ Parameter: Anfangswert  $G_0$  und Wachstumsrate  $r$ :  $1/r$  gibt das Zeitintervall für einen Wachstum um den Faktor  $e = 2.71\dots$  an
- ▶ Multiplikativer unbestimmter Faktor  $e^\epsilon$
- ▶ **Linearisierung:**  $Y(t) = \ln G(t) = \ln G_0 + \frac{t}{r} + \epsilon$
- ▶ **Standardform:**  $Y(x) = \beta'x + \epsilon = \beta_0 x_0 + \beta_1 x_1 + \epsilon$   
mit  $x_0 = 1, x_1 = t, \beta_0 = \ln G_0, \beta_1 = r$

*Merke:* Anders als die Transformation der exogenen Variablen beeinflusst die der endogenen Variablen auch den Zufallsanteil, macht hier beispielsweise aus einem multiplikativen Zufallsfaktor einen additiven Anteil

### 2.2.3 Linear vs. nichtlinear: **reduzibel nichtlinear**

Die Zusammenfassung in Faktoren transformiert die *exogenen* Variablen. Analog kann man manchmal auch die *endogenen* Variablen transformieren, um Linearität zu erreichen. Klassiker ist das

**Modell für unbeschränktes Wachstum**  $G(t) = G_0 e^{rt+\epsilon}$

- ▶ Urprüngliche endogene Variable  $G$ : Wachstumsmerkmal, z.B. Umsatz oder Gewinn von Firmen, Aktienkurse, BIP, Infektionszahlen ohne jede Herdenimmunität
- ▶ Exogene Variable: Zeit  $t$
- ▶ Parameter: Anfangswert  $G_0$  und Wachstumsrate  $r$ :  $1/r$  gibt das Zeitintervall für einen Wachstum um den Faktor  $e = 2.71\dots$  an
- ▶ Multiplikativer unbestimmter Faktor  $e^\epsilon$
- ▶ **Linearisierung:**  $Y(t) = \ln G(t) = \ln G_0 + \frac{t}{r} + \epsilon$
- ▶ **Standardform:**  $Y(x) = \beta'x + \epsilon = \beta_0 x_0 + \beta_1 x_1 + \epsilon$   
mit  $x_0 = 1, x_1 = t, \beta_0 = \ln G_0, \beta_1 = r$

*Merke:* Anders als die Transformation der exogenen Variablen beeinflusst die der endogenen Variablen auch den Zufallsanteil, macht hier beispielsweise aus einem multiplikativen Zufallsfaktor einen additiven Anteil

### 2.2.3 Linear vs. nichtlinear: **reduzibel nichtlinear**

Die Zusammenfassung in Faktoren transformiert die *exogenen* Variablen. Analog kann man manchmal auch die *endogenen* Variablen transformieren, um Linearität zu erreichen. Klassiker ist das

**Modell für unbeschränktes Wachstum**  $G(t) = G_0 e^{rt + \epsilon}$

- ▶ Urprüngliche endogene Variable  $G$ : Wachstumsmerkmal, z.B. Umsatz oder Gewinn von Firmen, Aktienkurse, BIP, Infektionszahlen ohne jede Herdenimmunität
- ▶ Exogene Variable: Zeit  $t$
- ▶ Parameter: Anfangswert  $G_0$  und Wachstumsrate  $r$ :  $1/r$  gibt das Zeitintervall für einen Wachstum um den Faktor  $e = 2.71\dots$  an
- ▶ Multiplikativer unbestimmter Faktor  $e^\epsilon$
- ▶ **Linearisierung:**  $Y(t) = \ln G(t) = \ln G_0 + \frac{t}{r} + \epsilon$
- ▶ **Standardform:**  $Y(x) = \beta'x + \epsilon = \beta_0 x_0 + \beta_1 x_1 + \epsilon$   
mit  $x_0 = 1, x_1 = t, \beta_0 = \ln G_0, \beta_1 = r$

*Merke:* Anders als die Transformation der exogenen Variablen beeinflusst die der endogenen Variablen auch den Zufallsanteil, macht hier beispielsweise aus einem multiplikativen Zufallsfaktor einen additiven Anteil

### 2.2.3 Linear vs. nichtlinear: reduzibel nichtlinear

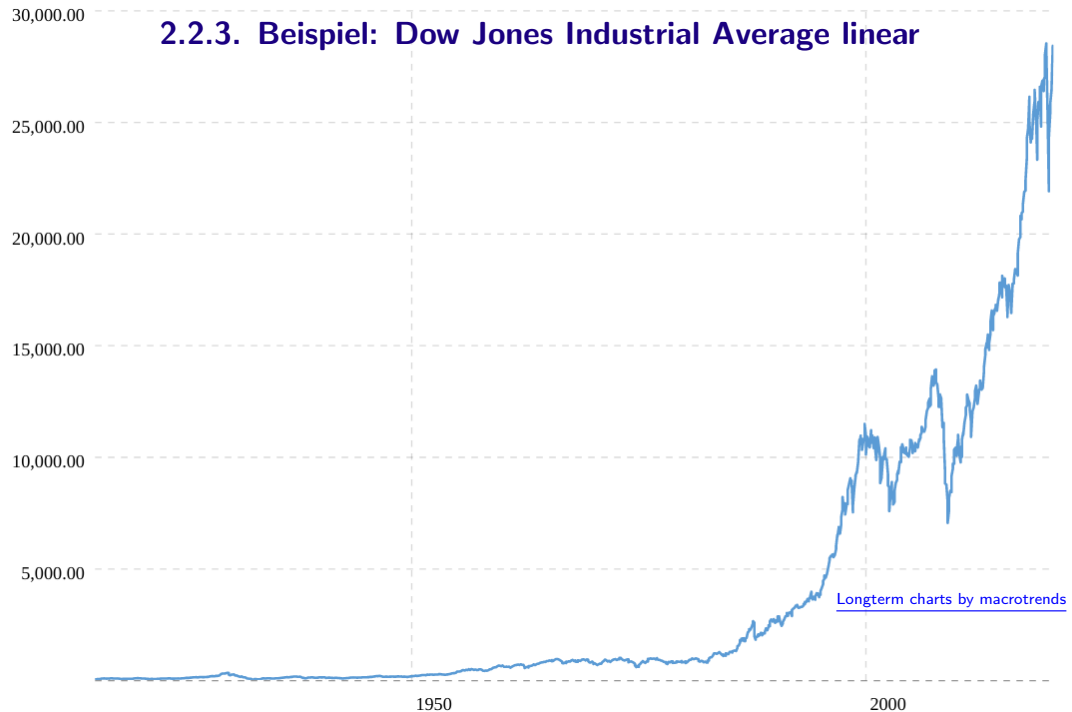
Die Zusammenfassung in Faktoren transformiert die *exogenen* Variablen. Analog kann man manchmal auch die *endogenen* Variablen transformieren, um Linearität zu erreichen. Klassiker ist das

**Modell für unbeschränktes Wachstum**  $G(t) = G_0 e^{rt+\epsilon}$

- ▶ Urprüngliche endogene Variable  $G$ : Wachstumsmerkmal, z.B. Umsatz oder Gewinn von Firmen, Aktienkurse, BIP, Infektionszahlen ohne jede Herdenimmunität
- ▶ Exogene Variable: Zeit  $t$
- ▶ Parameter: Anfangswert  $G_0$  und Wachstumsrate  $r$ :  $1/r$  gibt das Zeitintervall für einen Wachstum um den Faktor  $e = 2.71\dots$  an
- ▶ Multiplikativer unbestimmter Faktor  $e^\epsilon$
- ▶ **Linearisierung:**  $Y(t) = \ln G(t) = \ln G_0 + \frac{t}{\tau} + \epsilon$
- ▶ **Standardform:**  $Y(\mathbf{x}) = \beta' \mathbf{x} + \epsilon = \beta_0 x_0 + \beta_1 x_1 + \epsilon$   
mit  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = t$ ,  $\beta_0 = \ln G_0$ ,  $\beta_1 = r$

*Merke:* Anders als die Transformation der exogenen Variablen beeinflusst die der endogenen Variablen auch den Zufallsanteil, macht hier beispielsweise aus einem multiplikativen Zufallsfaktor einen additiven Anteil

## 2.2.3. Beispiel: Dow Jones Industrial Average linear



100,000

## 2.2.3. Beispiel: Dow Jones Industrial Average logarithmisch

10,000

1,000

100

1950

2000

[Longterm charts by macrotrends](#)







## 2.2.4 Linear vs. nichtlinear: irreduzibel nichtlinear

Klassiker: beschränktes Wachstum

$$y(t) = \frac{y_s}{1 + (y_s/y_0 - 1)e^{-rt}}$$

- Lösung der ODE

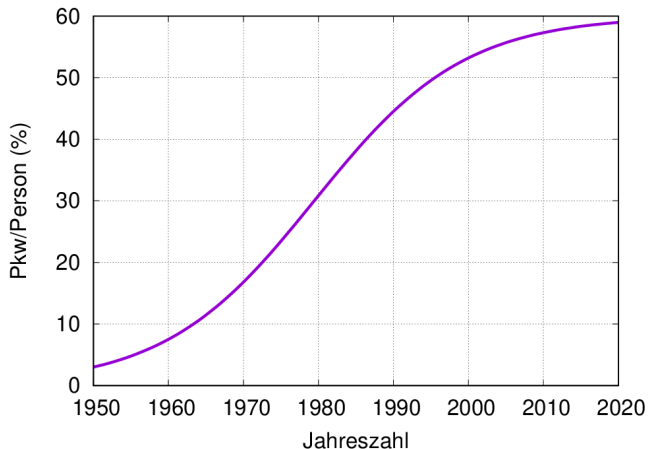
$$\frac{dy}{dt} = ry(t) \left( 1 - \frac{y(t)}{y_s} \right)$$

für den Anfangswert  $y(t_0) = y_0$

- Plot für  $t_0 = 1950$ ,  $y_0 = 3\%$ ,  $y_s = 60\%$ , und  $r = 1/10$  Jahre

? Was könnte dies darstellen?

! z.B. Marktdurchdringung eines neuen Produktes (Smartphone, Autos ...)



## 2.2.4 Linear vs. nichtlinear: irreduzibel nichtlinear

Klassiker: beschränktes Wachstum

$$y(t) = \frac{y_s}{1 + (y_s/y_0 - 1)e^{-rt}}$$

- ▶ Lösung der ODE

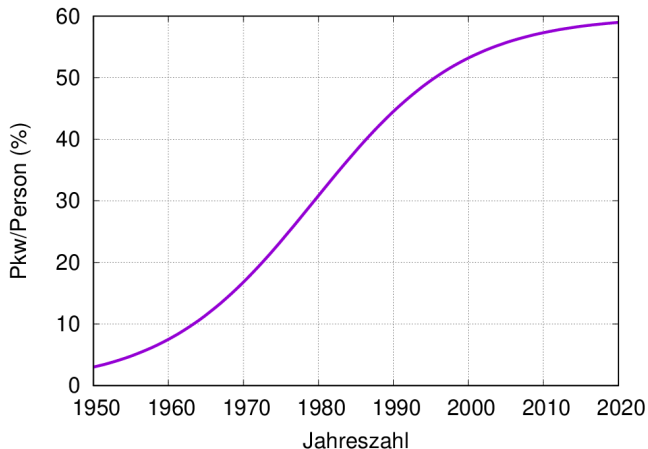
$$\frac{dy}{dt} = ry(t) \left( 1 - \frac{y(t)}{y_s} \right)$$

für den Anfangswert  $y(t_0) = y_0$

- ▶ Plot für  $t_0 = 1950$ ,  $y_0 = 3\%$ ,  
 $y_s = 60\%$ , und  $r = 1/10$  Jahre

? Was könnte dies darstellen?

! z.B. Marktdurchdringung eines neuen Produktes (Smartphone, Autos ...)



## 2.2.4 Linear vs. nichtlinear: irreduzibel nichtlinear

Klassiker: beschränktes Wachstum

$$y(t) = \frac{y_s}{1 + (y_s/y_0 - 1)e^{-rt}}$$

- ▶ Lösung der ODE

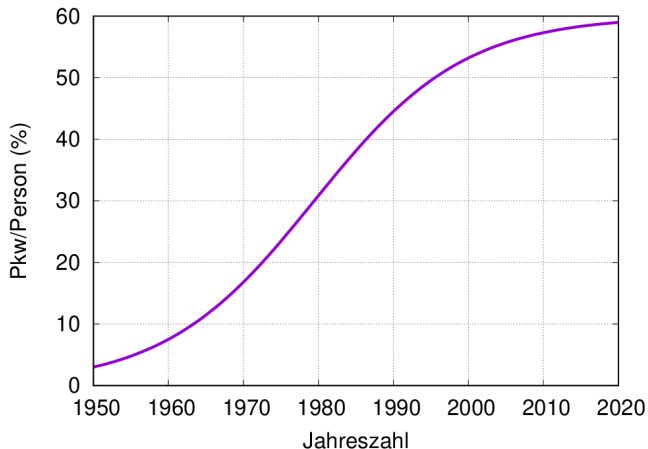
$$\frac{dy}{dt} = ry(t) \left(1 - \frac{y(t)}{y_s}\right)$$

für den Anfangswert  $y(t_0) = y_0$

- ▶ Plot für  $t_0 = 1950$ ,  $y_0 = 3\%$ ,  
 $y_s = 60\%$ , und  $r = 1/10$  Jahre

? Was könnte dies darstellen?

- ! z.B. Marktdurchdringung eines neuen Produktes (Smartphone, Autos ...)



## 2.3 Weitere Kriterien für die Modellfunktion

- ▶ **Deterministisch** vs. **stochastisch**
- ▶ Natur des Modells: **mikroskopisch** vs. **makroskopisch**
- ▶ Zahl der endogenen Variablen: Ein- vs. Mehrgleichungsmodelle ( $\Rightarrow$  2.1)
- ▶ Skalierung der endogenen Variablen: reellwertig (metrisch)  $\rightarrow$  z.B. **Regressionsmodelle** vs. diskret (ordinal- oder nominalskaliert)  $\rightarrow$  z.B. **diskrete Wahltheorie**
- ▶ Abhängigkeitsstrukturen: Verkettung, Kopplung, Rückkopplung

*Beispiele:*

- ▶ Ein Modell für die zu erwartenden Wahrscheinlichkeiten beim Modal-Split ist ein *deterministisches, makroskopisches, kontinuierliches Mehrgleichungsmodell mit Verkettung* zweier Teilmodelle
- ▶ Ein Modell für die Wahl durch eine einzelne Person ist ein *stochastisches, mikroskopisches, diskretes Mehrgleichungsmodell mit Verkettung* zweier Teilmodelle

## 2.3 Weitere Kriterien für die Modellfunktion

- ▶ **Deterministisch** vs. **stochastisch**
- ▶ Natur des Modells: **mikroskopisch** vs. **makroskopisch**
- ▶ Zahl der endogenen Variablen: Ein- vs. Mehrgleichungsmodelle ( $\Rightarrow$  2.1)
- ▶ Skalierung der endogenen Variablen: reellwertig (metrisch)  $\rightarrow$  z.B. **Regressionsmodelle** vs. diskret (ordinal- oder nominalskaliert)  $\rightarrow$  z.B. **diskrete Wahltheorie**
- ▶ Abhängigkeitsstrukturen: Verkettung, Kopplung, Rückkopplung

*Beispiele:*

- ▶ Ein Modell für die zu erwartenden Wahrscheinlichkeiten beim Modal-Split ist ein *deterministisches, makroskopisches, kontinuierliches Mehrgleichungsmodell mit Verkettung* zweier Teilmodelle
- ▶ Ein Modell für die Wahl durch eine einzelne Person ist ein *stochastisches, mikroskopisches, diskretes Mehrgleichungsmodell mit Verkettung* zweier Teilmodelle

## 2.3 Weitere Kriterien für die Modellfunktion

- ▶ **Deterministisch** vs. **stochastisch**
- ▶ Natur des Modells: **mikroskopisch** vs. **makroskopisch**
- ▶ Zahl der endogenen Variablen: Ein- vs. Mehrgleichungsmodelle ( $\Rightarrow$  2.1)
- ▶ Skalierung der endogenen Variablen: reellwertig (metrisch)  $\rightarrow$  z.B. **Regressionsmodelle** vs. diskret (ordinal- oder nominalskaliert)  $\rightarrow$  z.B. **diskrete Wahltheorie**
- ▶ Abhängigkeitsstrukturen: Verkettung, Kopplung, Rückkopplung

*Beispiele:*

- ▶ Ein Modell für die zu erwartenden *Wahrscheinlichkeiten* beim Modal-Split ist ein *deterministisches, makroskopisches, kontinuierliches Mehrgleichungsmodell* mit *Verkettung* zweier Teilmodelle
- ▶ Ein Modell für die Wahl durch eine einzelne Person ist ein *stochastisches, mikroskopisches, diskretes Mehrgleichungsmodell* mit *Verkettung* zweier Teilmodelle

## 2.3 Weitere Kriterien für die Modellfunktion

- ▶ **Deterministisch** vs. **stochastisch**
- ▶ Natur des Modells: **mikroskopisch** vs. **makroskopisch**
- ▶ Zahl der endogenen Variablen: Ein- vs. Mehrgleichungsmodelle ( $\Rightarrow$  2.1)
- ▶ Skalierung der endogenen Variablen: reellwertig (metrisch)  $\rightarrow$  z.B. **Regressionsmodelle** vs. diskret (ordinal- oder nominalskaliert)  $\rightarrow$  z.B. **diskrete Wahltheorie**
- ▶ Abhängigkeitsstrukturen: Verkettung, Kopplung, Rückkopplung

*Beispiele:*

- ▶ Ein Modell für die *zu erwartenden Wahrscheinlichkeiten* beim Modal-Split ist ein *deterministisches, makroskopisches, kontinuierliches Mehrgleichungsmodell* mit *Verkettung* zweier Teilmodelle
- ▶ Ein Modell für die *Wahl durch eine einzelne Person* ist ein *stochastisches, mikroskopisches, diskretes Mehrgleichungsmodell* mit *Verkettung* zweier Teilmodelle

## 2.3 Weitere Kriterien für die Modellfunktion

- ▶ **Deterministisch** vs. **stochastisch**
- ▶ Natur des Modells: **mikroskopisch** vs. **makroskopisch**
- ▶ Zahl der endogenen Variablen: Ein- vs. Mehrgleichungsmodelle ( $\Rightarrow$  2.1)
- ▶ Skalierung der endogenen Variablen: reellwertig (metrisch)  $\rightarrow$  z.B. **Regressionsmodelle** vs. diskret (ordinal- oder nominalskaliert)  $\rightarrow$  z.B. **diskrete Wahltheorie**
- ▶ Abhängigkeitsstrukturen: Verkettung, Kopplung, Rückkopplung

*Beispiele:*

- ▶ Ein Modell für die **zu erwartenden Wahrscheinlichkeiten** beim Modal-Split ist ein *deterministisches, makroskopisches, kontinuierliches Mehrgleichungsmodell* mit *Verkettung* zweier Teilmodelle
- ▶ Ein Modell für die **Wahl durch eine einzelne Person** ist ein *stochastisches, mikroskopisches, diskretes Mehrgleichungsmodell* mit *Verkettung* zweier Teilmodelle



## 2.3 Weitere Kriterien für die Modellfunktion

- ▶ **Deterministisch** vs. **stochastisch**
- ▶ Natur des Modells: **mikroskopisch** vs. **makroskopisch**
- ▶ Zahl der endogenen Variablen: Ein- vs. Mehrgleichungsmodelle ( $\Rightarrow$  2.1)
- ▶ Skalierung der endogenen Variablen: reellwertig (metrisch)  $\rightarrow$  z.B. **Regressionsmodelle** vs. diskret (ordinal- oder nominalskaliert)  $\rightarrow$  z.B. **diskrete Wahltheorie**
- ▶ Abhängigkeitsstrukturen: Verkettung, Kopplung, Rückkopplung

*Beispiele:*

- ▶ Ein Modell für die **zu erwartenden Wahrscheinlichkeiten** beim Modal-Split ist ein *deterministisches, makroskopisches, kontinuierliches Mehrgleichungsmodell* mit *Verkettung* zweier Teilmodelle
- ▶ Ein Modell für die **Wahl durch eine einzelne Person** ist ein *stochastisches, mikroskopisches, diskretes Mehrgleichungsmodell* mit *Verkettung* zweier Teilmodelle

## 2.3 Weitere Kriterien für die Modellfunktion

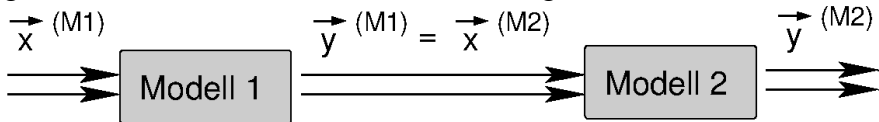
- ▶ **Deterministisch** vs. **stochastisch**
- ▶ Natur des Modells: **mikroskopisch** vs. **makroskopisch**
- ▶ Zahl der endogenen Variablen: Ein- vs. Mehrgleichungsmodelle ( $\Rightarrow$  2.1)
- ▶ Skalierung der endogenen Variablen: reellwertig (metrisch)  $\rightarrow$  z.B. **Regressionsmodelle** vs. diskret (ordinal- oder nominalskaliert)  $\rightarrow$  z.B. **diskrete Wahltheorie**
- ▶ Abhängigkeitsstrukturen: Verkettung, Kopplung, Rückkopplung

*Beispiele:*

- ▶ Ein Modell für die **zu erwartenden Wahrscheinlichkeiten** beim Modal-Split ist ein *deterministisches, makroskopisches, kontinuierliches Mehrgleichungsmodell* mit *Verkettung* zweier Teilmodelle
- ▶ Ein Modell für die **Wahl durch eine einzelne Person** ist ein *stochastisches, mikroskopisches, diskretes Mehrgleichungsmodell* mit *Verkettung* zweier Teilmodelle

## 2.4 Abhängigkeitsstrukturen 1: Verkettung

Die endogenen Variablen des Modell 1 dienen als exogene Variable für Modell 2



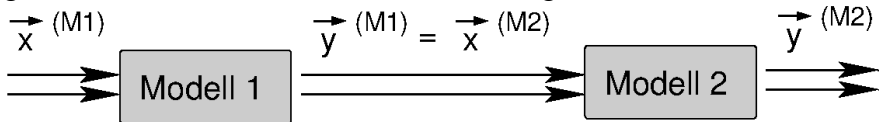
Spezialfall der Verkettung: **dynamische Modelle** für die **Zeitentwicklung**:

- ▶ Die endogenen Variablen zur Zeit  $t$  sind die exogenen zur Zeit  $t + \Delta t$
- ▶ Das Modell für jeden Schritt ist oft dasselbe (**autonomes Modell**)
- ▶ *Beispiel:* Umwandlung der Differentialgleichung  $\frac{dy}{dt} = ry(t) \left(1 - \frac{y(t)}{y_s}\right)$  des Modells für beschränkten Wachstums in eine verkettete Differenzengleichung

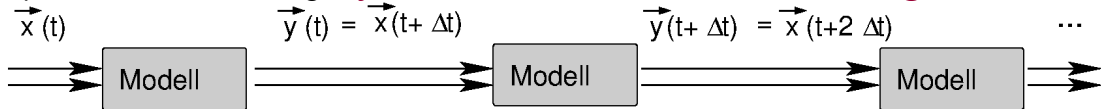
$$y(t + \Delta t) = y(t) + r \Delta t y(t) \left(1 - \frac{y(t)}{y_s}\right)$$

## 2.4 Abhängigkeitsstrukturen 1: Verkettung

Die endogenen Variablen des Modell 1 dienen als exogene Variable für Modell 2



Spezialfall der Verkettung: **dynamische Modelle** für die **Zeitentwicklung**:

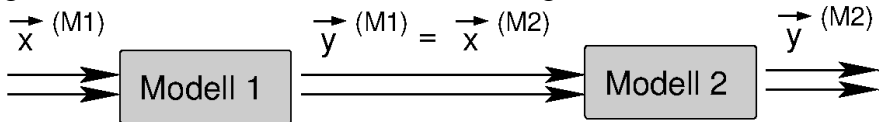


- ▶ Die endogenen Variablen zur Zeit  $t$  sind die exogenen zur Zeit  $t + \Delta t$
- ▶ Das Modell für jeden Schritt ist oft dasselbe (**autonomes Modell**)
- ▶ *Beispiel:* Umwandlung der Differentialgleichung  $\frac{dy}{dt} = ry(t) \left(1 - \frac{y(t)}{y_s}\right)$  des Modells für beschränkten Wachstums in eine verkettete Differenzengleichung

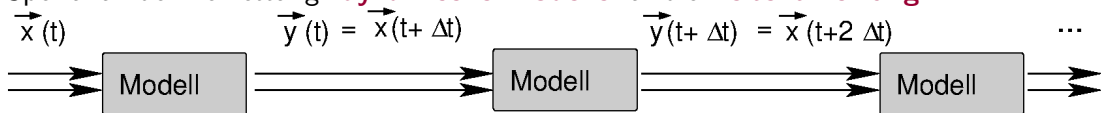
$$y(t + \Delta t) = y(t) + r \Delta t y(t) \left(1 - \frac{y(t)}{y_s}\right)$$

## 2.4 Abhängigkeitsstrukturen 1: Verkettung

Die endogenen Variablen des Modell 1 dienen als exogene Variable für Modell 2



Spezialfall der Verkettung: **dynamische Modelle** für die **Zeitentwicklung**:

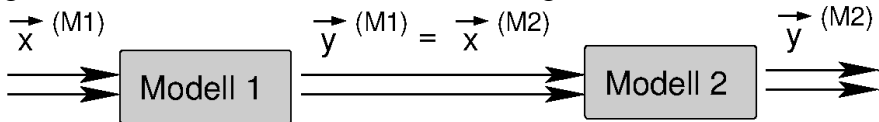


- ▶ Die endogenen Variablen zur Zeit  $t$  sind die exogenen zur Zeit  $t + \Delta t$
- ▶ Das Modell für jeden Schritt ist oft dasselbe (**autonomes Modell**)
- ▶ *Beispiel:* Umwandlung der Differentialgleichung  $\frac{dy}{dt} = ry(t) \left(1 - \frac{y(t)}{y_s}\right)$  des Modells für beschränkten Wachstums in eine verkettete Differenzengleichung

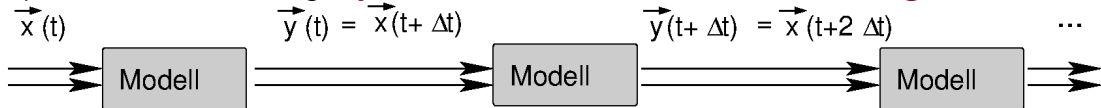
$$y(t + \Delta t) = y(t) + r \Delta t y(t) \left(1 - \frac{y(t)}{y_s}\right)$$

## 2.4 Abhängigkeitsstrukturen 1: Verkettung

Die endogenen Variablen des Modell 1 dienen als exogene Variable für Modell 2



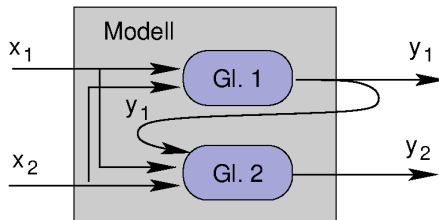
Spezialfall der Verkettung: **dynamische Modelle** für die **Zeitentwicklung**:



- ▶ Die endogenen Variablen zur Zeit  $t$  sind die exogenen zur Zeit  $t + \Delta t$
- ▶ Das Modell für jeden Schritt ist oft dasselbe (**autonomes Modell**)
- ▶ *Beispiel:* Umwandlung der Differentialgleichung  $\frac{dy}{dt} = ry(t) \left(1 - \frac{y(t)}{y_s}\right)$  des Modells für beschränkten Wachstums in eine verkettete Differenzengleichung

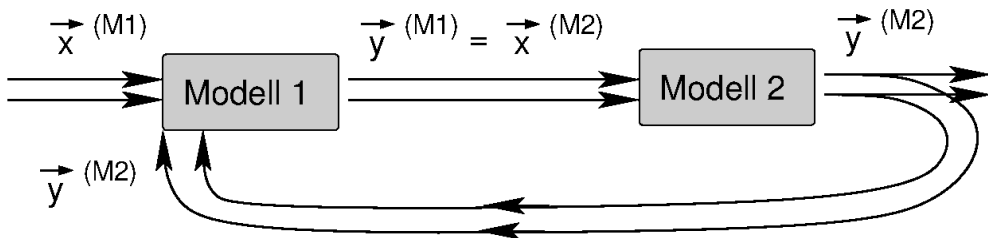
$$y(t + \Delta t) = y(t) + r \Delta t y(t) \left(1 - \frac{y(t)}{y_s}\right)$$

## 2.4 Abhängigkeitsstrukturen 2: Kopplung



Eine oder mehrere der endogenen Variablen der Modellgleichung 1 werden als exogene Variable an Gleichung 2 gekoppelt

## 2.4 Abhängigkeitsstrukturen 3: Rückkopplung

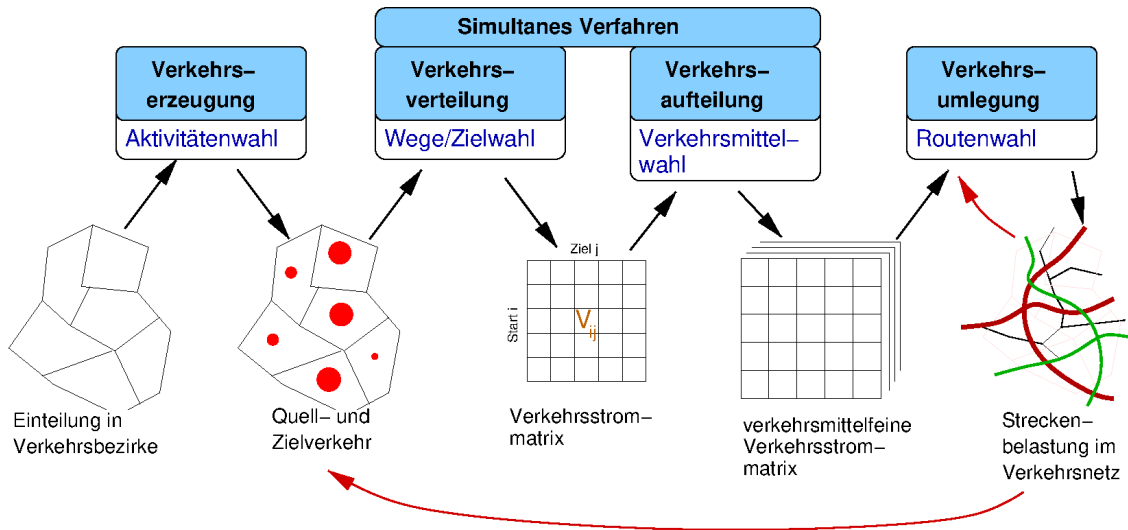


Kombination von Verkettung und Kopplung

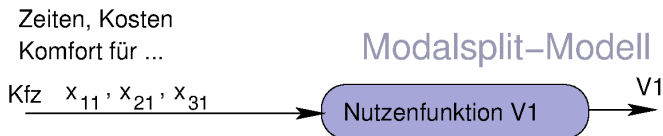




## 2.5 Modellbeispiel 2: Vierstufenmodell der Verkehrsplanung ⇒ VL 4ff

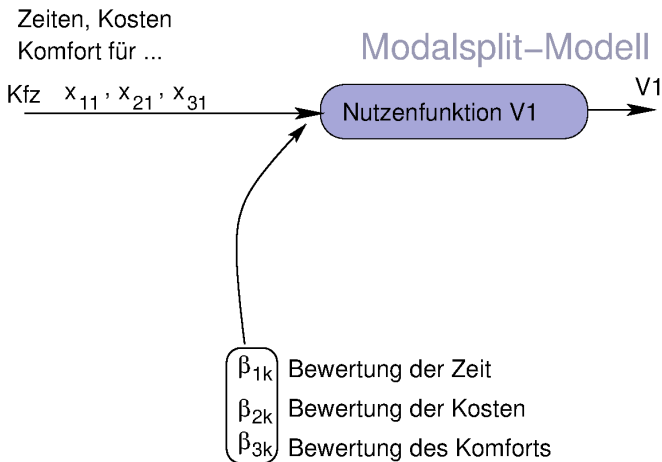


## 2.5 Modellbeispiel 3: Modal-Split Modell $\Rightarrow$ VL 6ff



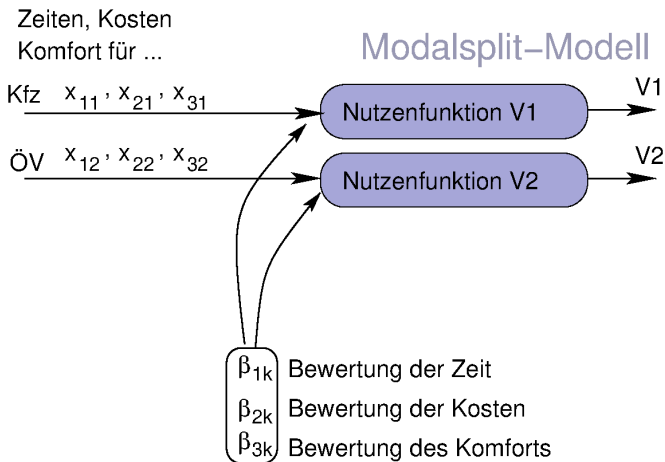
- ▶ Exogene Variablen  $x_{jk}$ : Einflussfaktor  $j$  für Modus  $k$

## 2.5 Modellbeispiel 3: Modal-Split Modell ⇒ VL 6ff



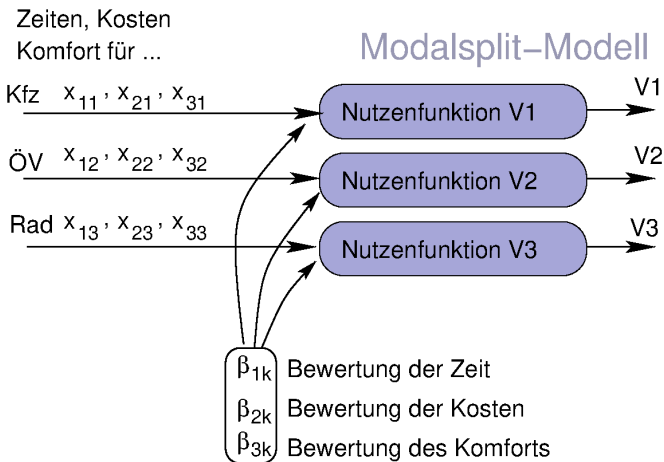
- ▶ Exogene Variablen  $x_{jk}$ : Einflussfaktor  $j$  für Modus  $k$

## 2.5 Modellbeispiel 3: Modal-Split Modell ⇒ VL 6ff



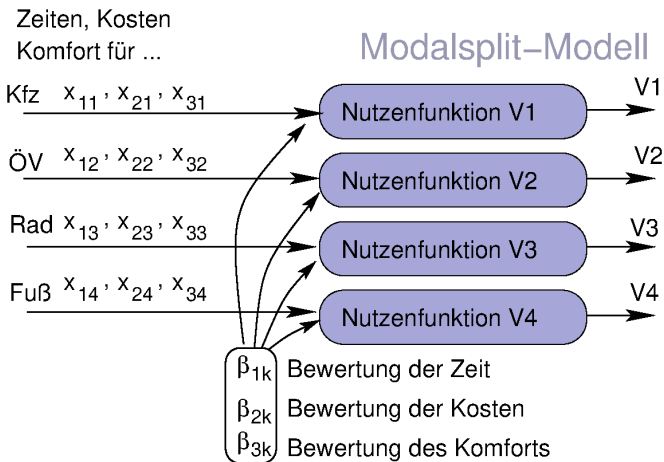
- ▶ Exogene Variablen  $x_{jk}$ : Einflussfaktor  $j$  für Modus  $k$

## 2.5 Modellbeispiel 3: Modal-Split Modell ⇒ VL 6ff



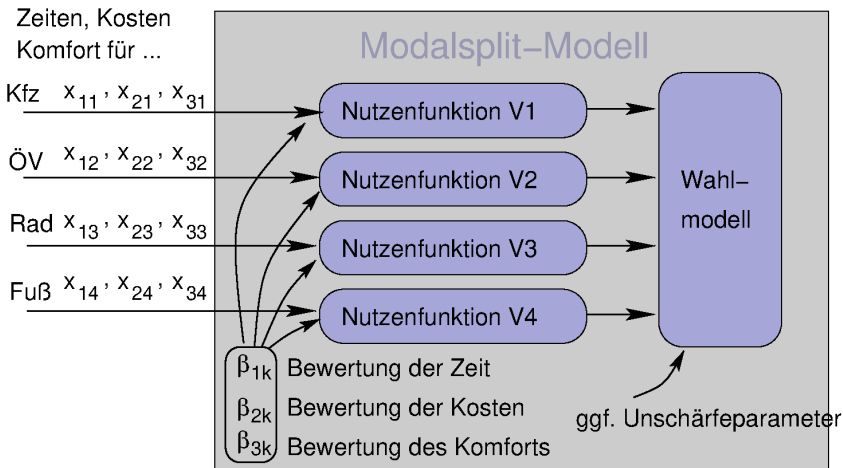
- ▶ Exogene Variablen  $x_{jk}$ : Einflussfaktor  $j$  für Modus  $k$

## 2.5 Modellbeispiel 3: Modal-Split Modell ⇒ VL 6ff



- ▶ Exogene Variablen  $x_{jk}$ : Einflussfaktor  $j$  für Modus  $k$

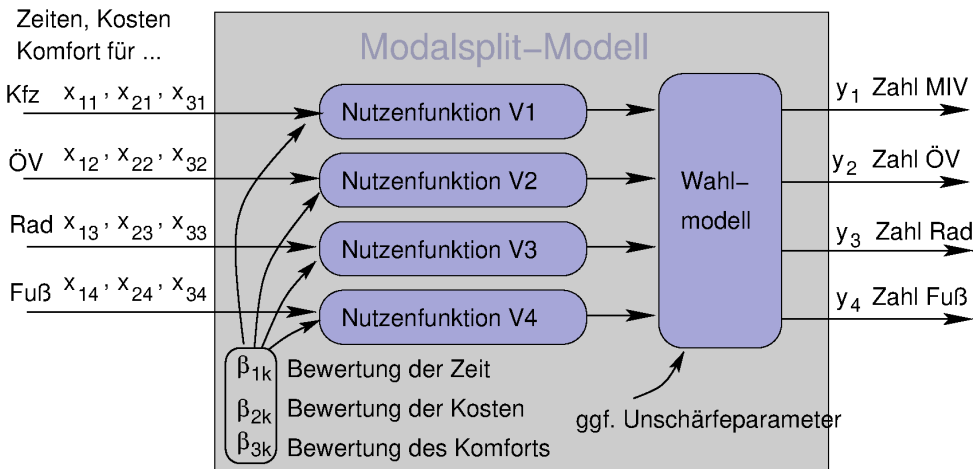
## 2.5 Modellbeispiel 3: Modal-Split Modell ⇒ VL 6ff



- ▶ Exogene Variablen  $x_{jk}$ : Einflussfaktor  $j$  für Modus  $k$



## 2.5 Modellbeispiel 3: Modal-Split Modell ⇒ VL 6ff



- ▶ Exogene Variablen  $x_{jk}$ : Einflussfaktor  $j$  für Modus  $k$
- ▶ Endogenous variables  $y_k$ : Auswahldummy  $\in \{0, 1\}$  oder Auswahlwahrscheinlichkeit für Verkehrsmodus  $k$

## 2.5 zu Beispiel 3: Inputdaten bei zwei Alternativen

	Alter	Ge- schlecht	Zeit TT Rad	Kosten Rad	Zeit TT ÖV	Kosten ÖV	Wahl Rad	Wahl PT
Variable	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$y_{1i}$	$y_{2i}$
Person 1	30	w	20 min	0 €	30 min	1.00 €	0	1
Person 2	24	m	11 min	0 €	20 min	2.00 €	1	0
Person 3	27	m	34 min	0 €	15 min	2.00 €	0	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Daten z.B. von Interviews/Interneterhebungen ⇒ VL 8