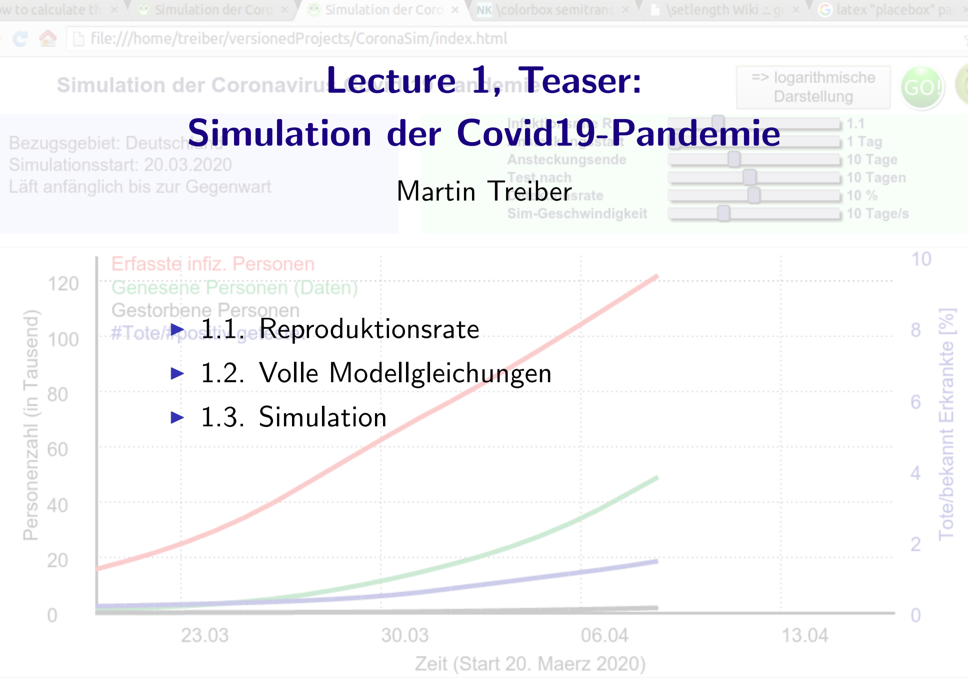
# Lecture 1, Teaser: Simulation der Covid19-Pandemie

Martin Treiber

- 1.1. Reproduktionsrate
- 1.2. Volle Modellgleichungen
- 1.3. Simulation



# 1.1 Reproduktionsrate, einfachster Fall: Exponentielles Wachstum

- Sei $x_t$ Anteil an Infizierten (einschl. der Gestorbenen und wieder Gesunden) $\in [0, 1]$
- Reproduktionsrate $R_0$: Zahl der Menschen, die eine infizierte Person im Verlauf ihrer Krankheit ansteckt *falls keinerlei Immunität herrscht*
- Sei (vereinfachend!) eine Ansteckung nur beim **Infektionsalter** $\tau_R$ möglich, also genau $\tau_R$ Tage nach der eigenen Ansteckung

Dann gilt für den $i$-ten Ansteckungszyklus (Ansteckung zur Zeit $t = \tau i$ durch Personen, welche $\tau$ Tage früher infiziert wurden):

$$x_{i+\tau_R} = R_0 x_i$$

# Exponentielles Wachstum II

$$x_{\tau i} = R_0 x_{\tau(i-1)}$$

Setze $x_t = x_0 e^{\lambda t} \;\Rightarrow$

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{\tau_R} \ln R_0}$$

- **exponentielles Wachstum** mit Wachstumsrate $\lambda$
- Ist $\boldsymbol{R_0 > 1}$, ist $\lambda > 0$ und es gibt ein exponentielles Wachstum, z.B. $R_0 = 2$, $\tau_R = 5$ eine Verdoppelung alle 5 Tage
- Ist $\boldsymbol{R_0 < 1}$, ist $\lambda < 0$ und die *Neu*infektionen nehmen exponentiell ab. Bei $R_0 = 1/2$ und $\tau_R = 5$ halbieren sie sich alle 5 Tage.
- Falls $\boldsymbol{R_0 = 1}$, ist die Rate der Neuinfektionen konstant, es gibt also ein konstantes Wachstum

Gibt es Teilimmunität, ist die tatsächliche Reproduktionsrate $R < R_0$

# Grenzen des Wachstums durch Teilimmunität

Unter Beibehaltung der idealisierten Annahme "Infektion genau nach $\tau_R$ Tagen der Ansteckung" ergibt sich als Verallgemeinerung

$$x_{i+\tau_R} = R_0(1-u)x_i$$

mit $u$ dem Anteil der bereits bisher Infizierten

- Eine gleichbleibende Neuinfektionsrate, $x_{i+\tau_R} = x_i = x$ ist durch die Bedingung

  $$x = R_0(1-u)x \quad \Rightarrow \quad u = \frac{R_0 - 1}{R_0}$$

  gegeben, also z.B. bei $R_0 = 2$ für $u = 50\,\%$ "Durchseuchung"
- Damit ist die Infektion aber nicht beendet. Schließlich stiegen die Infektionsraten bis zu z.B. 50 % Durchseuchung und es bedarf weiterer Infektionen, bis die Rate zurück auf 0 sinkt (etwa 75 %, siehe Simulationen)

# Das volle Modell I: Größen

Die “aktiven” Größen der Infektionsdynamik müssen nach dem **Infektionsalter $\tau$**, also der Zeit seit der Infektion in Tagen, disaggregiert werden:

- $x_\tau(t)$: Anteil der Erkrankten im Infektionsalter $\tau$ ($x_\tau \in [0, 1]$),
- $y_\tau(t)$: Anteil der gesundeten Infizierten “ “
- $z_\tau(t)$: Anteil der gestorbenen Infizierten “ “
- $u_\tau(t) = x_\tau(t) + y_\tau(t) + z_\tau(t)$: Gesamtanteil an Infizierten “ “
- $u_I(t)$: Immunisierungsgrad

Der **Immunisierungsgrad** $u_I$ ergibt sich aus allen bereits infizierten Personen mit beliebigen Ausgang sowie aus dem Impfanteil $I$:

$$\begin{aligned} u_I(t) &= I + (1 - I)u(t), \\ u(t) &= \sum_{\tau=0}^{t} u_\tau(t) \end{aligned}$$

# Das volle Modell II: Primärdynamik

**Infektionsmodell:** *Jede erkrankte Person im Infektionsalter $\tau$ steckt an diesem Tag $R_0 f_R(\tau)$ neue nicht-immune Personen an.*

$$
\begin{aligned}
x_{\tau+1}(t+1) &= x_\tau(t) - H_\tau(t) - D_\tau(t), \\
x_0(t+1) &= R_0\big(1 - u_I(t)\big) \sum_{\tau'} f_R(\tau') x_{\tau'}(t)
\end{aligned}
$$

- Die erste Zeile ist ein schlichter Erhaltungssatz für die Personen und Anteile (wir nehmen keine sonstigen Zu- und Abnahmen der Bevölkerung an): Verschiebung, Gesundung und Tod.
- Die zweite Zeile betrifft die Neuansteckungen (Infektionsalter 0) gemäß obigem Prinzip
- **Effektive Reproduktionsrate:** $R = R_0(1 - u_I)$
- $f_R(\tau)$: Verteilungsfunktion der ansteckenden Phase des Infektionsalters mit $\sum_\tau f_R(\tau) = 1$

# Das volle Modell III: Sekundärdynamik

Todesfälle und die Fälle der Heilungen:

$$\begin{aligned} y_{\tau+1}(t+1) &= H_\tau(t), \\ z_{\tau+1}(t+1) &= D_\tau(t) \end{aligned}$$

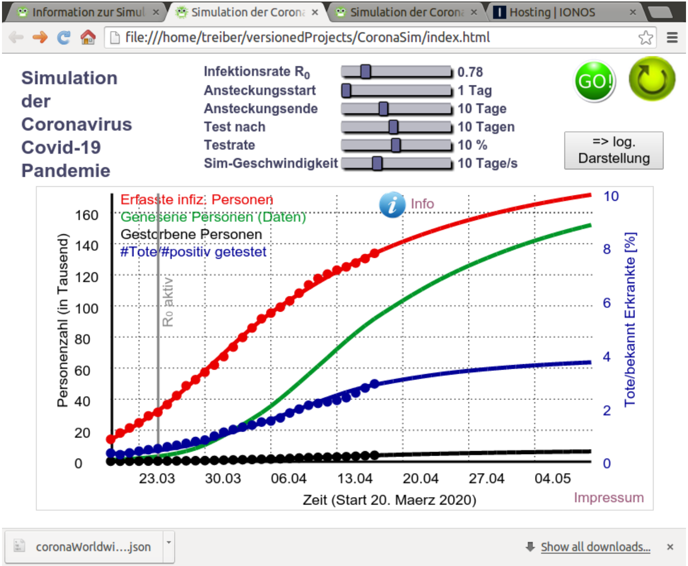
Übergangsraten $H_\tau(t)$ und $D_\tau(t)$:

$$\begin{aligned} D_\tau(t) &= p_D f_D(\tau) u_\tau(t), \\ H_\tau(t) &= (1-p_D) f_H(\tau) u_\tau(t) \end{aligned}$$

- Sterberisiko $p_D$ (z.B. $p_D = 0.5\,\%$),
- $f_D$: bedingte Verteilungsfunktion für den Tod im Infektionsalter $\tau$
- $f_H$: bedingte Verteilungsfunktion für Heilung im Infektionsalter $\tau$
- $D$ und $H$ sind proportional zu $u_\tau = x_\tau + y_\tau + z_\tau$, da sich die Verteilungsfunktionen auf die Gesamtinfiziertenzahl, nicht nur auf die Kranken, beziehen.

# Simulationen unter `corona-simulation.de`

Weiter mit Best-Fit Reproduktionsrate $R_0 = 0.78$:



# Simulationen unter `corona-simulation.de`

Laisser-Faire: Verdoppelung der Rate: 2 Wochen Verzögerung!