# Verkehrsökonometrie für Bachelor-Studierende

## Sommersemester 2021, Lösungsvorschläge zu Übung Nr. 8

### Lösungsvorschlag zu Aufgabe 8.1: Verkehrsumlegung nach den Wardrop'schen Prinzipien

(a) Reisezeiten $T_1$ und $T_2$ auf den beiden Wegen, falls dort die Flüsse $Q_1$ bzw. $Q_2$ herrschen:

$$\begin{aligned} T_1 &= 6\left(1+\frac{Q_1}{2000\text{Fz/h}}\right)+6\left(1+\frac{Q_1}{1000\text{Fz/h}}\right) \quad \text{und} \\ T_2 &= 18\left(1+\frac{Q_2}{1000\text{Fz/h}}\right) \end{aligned}$$

Im Folgenden wird die Routenaufteilung gleich allgemein für allgemeine Nachfragematrixelemente $F_{\text{AB}} = q1000\,\text{Fz/h}$, also für eine relative, auf die Kapazität der kleineren Straßen bezogene Nachfrage $q$ berechnet:

Mit diesem Ansatz und den Anteilen $w_1$ und $w_2 = 1$ - $w_1$ auf beiden Routen folgt

$$Q_1(w_1) = qw_1\ 1000\,\text{Fz/h}, \quad Q_2(w_1) = q(1-w_1)\ 1000\,\text{Fz/h}$$

und damit

$$\begin{aligned} T_1(w_1) &= 6\left(1+\frac{1}{2}qw_1\right)+6\left(1+qw_1\right) = 12+9qw_1 \quad \text{und} \\ T_2(w_1) &= 18\left(1+q(1-w_1)\right) = 18+18q(1-w_1). \end{aligned}$$

Wardrop I, Nutzergleichgewicht (*user equilibrium*, UE): "Die Reisezeiten aller befahrenen Routen sind gleich und minimal". Falls beide Anteile ungleich null, gilt also $T_1 = T_2$, also (für allgemeines $q$):

$$\begin{aligned} 12+9qw_1 &= 18+18q-18qw_1 \\ w_1^{\text{UE}} &= \frac{6+18q}{27q} = \frac{2+6q}{9q} \end{aligned}$$

für q=1 (d.h. $F_{\text{AB}} = 1000\,\text{Fz/h}$) also

$$w_1^{\text{UE}} = \frac{8}{9}.$$

(b) (i) Berechnung mit globaler Minimierung:

Wardrop II, Systemoptimum (*system optimum*, SO): "unter schwachen Bedingungen (monoton steigende CR-Funktionen) gibt es einen eindeutigen systemoptimalen Zustand, welcher den Gesamtnutzen aller Verkehrsteilnehmer maximiert. Das SO entspricht i.A. nicht dem UE und ist dann auch kein Gleichgewichtszustand".

Hier bedeutet dies: "Die *Gesamtreisezeit* aller Fahrten auf allen Routen sind minimal". Es ist also die Gesamtreisezeit $T_{\text{gesamt}} = F_{\text{AB}}\bar{T}$ bezüglich des Weganteils $w_1$ zu minimieren. Da die Nachfrage, also das entsprechende Fahrtenmatrixelement $F_{\text{AB}}$, konstant angenommen wird ($F_{\text{AB}} = 1000\,\text{Fz/h}$ bzw. $q = 1$), genügt es, die (mit den Anteilen gewichtete) mittlere Reisezeit zu minimieren:

$$\begin{aligned}\bar{T} &= w_1 T_1(w_1) + (1-w_1)T_2(w_1) \\ &= w_1(12 + 9qw_1) + (1-w_1)(18 + 18q(1-w_1)) \\ &= 18(1+q) - w_1(6+36q) + 27qw_1^2\end{aligned}$$

Ableiten nach $w_1$ und Nullsetzen ergibt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{T}}{\partial w_1} &= -(6+36q) + 54qw_1 \stackrel{!}{=} 0 \\ w_1^{\text{SO}} &= \frac{1+6q}{9q}\end{aligned}$$

(ii) Berechnung als UE bezüglich der modifizierten CR-Funktionen:

Die CR-Funktionen aller Links werden durch den Operator $(1 + Q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Q})$ modifiziert (auf dieser Ebene ist man noch völlig unabhängig von Routen oder Wardrop'schen Prinzipien):

$$\tilde{T}_l(Q) = (1 + Q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Q})T_l(Q) = T_{l0}(1 + Q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Q})\left(1 + \frac{Q}{K_l}\right) = T_{l0}\left(1 + \frac{2Q}{K_l}\right)$$

Es gilt also für jeden Link:

$$\tilde{T}_l(Q) = T_l(2Q)$$

und damit auch für die Routen:

$$\text{UE}_{\tilde{T}_l}(Q) = \text{SO}_{T_l}(Q) = \text{UE}_{T_l}(2Q)$$

wobei im letzten Teil der Gleichung bei mehreren Nachfrageelementen *alle* Nachfragen um den Faktor 2 erhöht werden. Die Modifizierte CR-Funktionen gehört also ebenso wie die ursprüngliche zur Klasse der BPR-CR-Funktionen mit $\gamma = 1$, nur ist die Kapazität *halbiert*, was man an der anderen Schreibweise

$$\tilde{T}_l(Q) = T_{l0}\left(1 + \frac{Q}{K_l/2}\right)$$

sieht.

Da die relative Nachfrage $q$ von der absoluten nur um einen konstanten Faktor unterschiedlich ist, kann der Operator auch in relativen Größen geschrieben werden:

$$1 + Q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Q} = 1 + q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}$$

Damit ergibt sich mit dem allgemeinen Ausdruck $w_1^{\mathrm{UE}}(q) = (2+6q)/(9q)$ von oben:

$$w_1^{\mathrm{SO}}(q) = w_1^{\mathrm{UE}}(2q) = \frac{2+12q}{18q} = \frac{1+6q}{9q}$$

also identisch zur direkten Minimierung und für $q = 1$:

$$w_1^{\mathrm{SO}}(q=1) = \frac{7}{9}.$$

Zusammenfassend:

Bezeichnet man mit dem Superskript $\tilde{UE}$ das Nutzergleichgewicht bezüglich der modifizierten CR-Funktionen $\tilde{T}_l(Q)$ bzw. der modifizierten Reisezeiten $\tilde{T}_r(w_1|q)$, so erhält man für die BPR CR-Funktionen das interessante Ergebnis

$$w_r^{\tilde{UE}}(q) = w_r^{\mathrm{SO}}(q) = w_r^{\mathrm{UE}}(2q) \tag{1}$$

Das erste Gleichheitszeichen gilt dabei für beliebige monoton steigenden differenzierbaren CR-Funktionen, das zweite nur für die BPR CR-Funktionen.

Dieses, hier für einen Spezialfall gezeigte Ergebnis gilt viel allgemeiner, insbesondere

- für ein Netzwerk mit beliebig verteilten BPR-CR Parametern auf den einzelnen Kanten; das erste Gleichheitszeichen für beliebige, auch gemischte CR-Funktionen unterschiedlichen Typs,
- Für die volle Fahrtenmatrix (und nicht nur wie hier ein Element $Q_{\mathrm{AB}}$) als Nachfrage, ein Fall, in welchem vielfältige nichtlineare Kopplungen zwischen Kantenbelegungen und Routenaufteilungen auftreten.

(c) Erstes Wardrop'sches Prinzip bzw. Nutzergleichgewicht (User equilibrium, UE) in lokaler Formulierung:

$$(T_r - T_r^{\min})w_r = 0 \quad r = 1, 2$$

Nimmt man $w_r \in ]0,1]$ an (die Intervallgrenzen stellen einen Sonderfall dar, bei der für eine Route beide Faktoren der Bedingung gleich null sind), ergibt dies die Bedingung $T_1 = T_2$, also

$$\begin{aligned} 12 + 9qw_1 &= 18 + 18q(1-w_1) \\ 27qw_1 &= 6 + 18q \;\rightarrow\; \underline{\underline{w_1(q) = \frac{2+6q}{9q}}} \text{ bzw. } w_2 = 1 - w_1. \end{aligned}$$

Zweites Wardrop'sches Prinzip bzw. Systemoptimum (SO) in globaler (Extremalwert-) Formulierung:

$$\bar{T}(\boldsymbol{w}|q) = \sum_r w_r T_r(q, \boldsymbol{w}) = \min_{\boldsymbol{w}}$$

Also hier:

$$\begin{aligned}\bar{T}(w_1|q) &= w_1 T_1(q,w_1) + (1-w_1)T_2(q,w_1) \\ &= w_1(12 + 9qw_1 + (1-w_1)(18+18q(1-w_1)) \\ &= = 27w_1^2 q - w_1(6+36q) + \text{const.} = \min_{w_1}\end{aligned}$$

und als notwendige Bedingung

$$\frac{\mathrm{d}\bar{T}(w_1|q)}{\mathrm{d}w_1} = 54w_1 q - 6 - 36q = 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{w_1 = \frac{12q+2}{18q}}}$$

(Dasselbe bekommt man antürlich auch mit dem modifizierten CR-Funktionen, siehe das Ergebnis der vorhergehenden Teilaufgabe).

Resultiert die Bedingung $T_1 = T_2$ in Werte $w_1 < 0$ oder $w_1 > 1$, so ist die Annahme hinter dieser Bedingung (erster Teil von Wardrop I: "alle befahrenen Routen haben dieselbe minimale Reisezeit") nicht erfüllt und der zweite Teil greift: "Routen ohne Verkehrsaufkommen haben eine höhere als die minimale Reisezeit". Hier kann unter Annahme $T_1 = T_2$ $w_1$ nie negativ werden, wohl aber für $q < 2/3$ Werte $> 1$ annehmen. Dann gilt $w_1 = 1$, $w_2 = 0$ und (einfach nachrechnen!) $T_2 > T_1$. Die Rücksetzung auf erlaubte Werte ist also konsistent mit dem zweiten Teil von Wardrop I. Zusammenfassend:

$$w_1^{\mathrm{UE}}(q) = \begin{cases} \frac{2+6q}{9q} & \text{falls } q \ge 2/3 \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad w_2^{\mathrm{UE}}(q) = 1 - w_1^{\mathrm{UE}}(q). \tag{2}$$

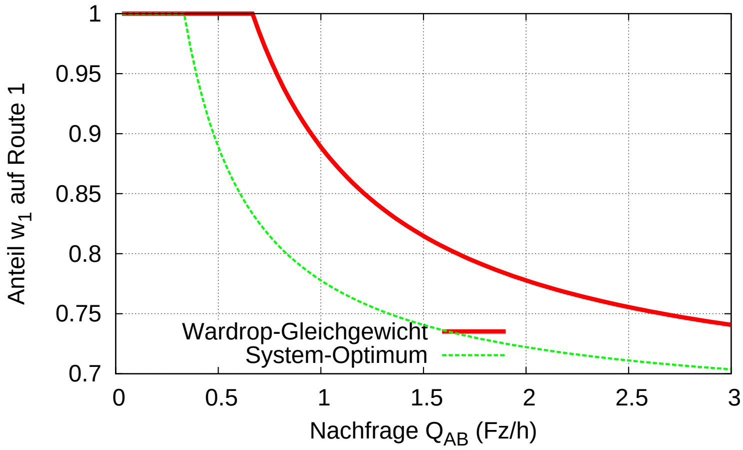
Im Systemoptimum entspricht die Begrenzung auf $w_r \in [0,1]$ den Nebenbedingungen der Optimierung: "Minimiere die Gesamtreisezeit unter den Nebenbedingungen einer festen Gesamtnachfrage $\sum_r Q_r = Q_{\mathrm{AB}} = \text{const.}$ sowie nichtnegativer Verkehrsaufkommen $Q_r \ge 0$ auf allen Routen".[1]

Insgesamt ergibt sich nach Berücksichtigung dieser Nebenbedingungen im SO also

$$w_1^{\mathrm{SO}}(q) = \begin{cases} \frac{2+12q}{18q} & \text{falls } q \ge 1/3 \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad w_2^{\mathrm{SO}}(q) = 1 - w_1^{\mathrm{SO}}(q) \tag{3}$$

Man beachte dass auch unter Berücksichtigung der Restriktionen die Beziehung $w_r^{\mathrm{SO}}(q) = w_r^{\mathrm{UE}}(2q)$ exakt gültig bleibt.

[1] Bei Umformulierung als UE bezüglich der modifizierten CR-Funktionen erhält man anstattdessen wieder die Ungleichungs-Bedingung von Wardrop I!




(d) Das Ergebnis der bisherigen Teilaufgaben besagt, dass man *durch geeignete Veränderung der generalisierten Wegekosten ein Systemoptimum (bezüglich der "alten" Kosten) in ein Nutzergleichgewicht (bezüglich der geänderten Kosten) umwandeln kann.* Dies kann insbesondere durch Maut erreicht werden.

Bisher erhielten wir in Abhängigkeit der relativen Nachfrage $q$ folgende Ergebnisse:

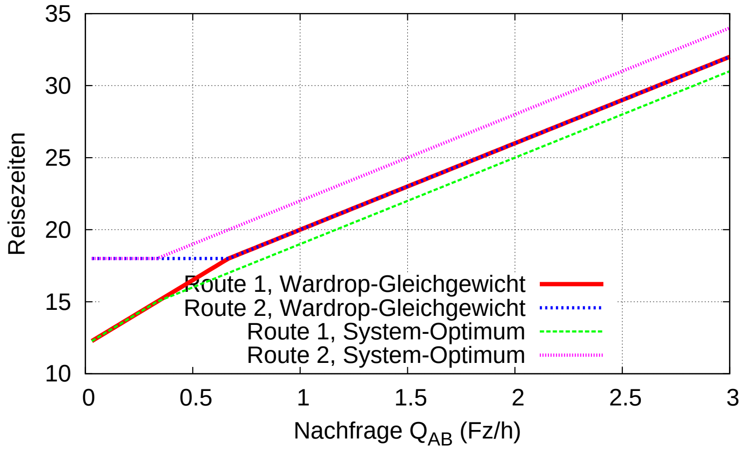
- Reisezeit auf Route 1: $T_1(q, w_1) = 12 + 9qw_1$,
- Reisezeit auf Route 2: $T_2(q, w_1) = 18 + 18q(1 - w_1)$,
- Nutzergleichgewicht: $w_1^{\text{UE}}(q) = \frac{2+6q}{9q}$,
- Systemoptimum: $w_1^{\text{SO}}(q) = w_1^{\text{UE}}(2q) = \frac{1+6q}{9q}$.

Offensichtlich muss die Maut auf der im UE bevorzugten Route (Route 1) das Geldäquivalent zur Zeitdifferenz der Route 2 zur Route 1 *im SO* sein:

$$
\begin{aligned}
\text{Äquiv}(M_1(q)) &= T_2(q, w_1^{\text{SO}}) - T_1(q, w_1^{\text{SO}}) \\
&= 18 + 18q - 18q\left(\frac{1+6q}{9q}\right) - 12 - 9q\left(\frac{1+6q}{9q}\right) \\
&= 16 + 6q - (13 + 6q) = \underline{\underline{3\,\text{Minuten}}}.
\end{aligned}
$$

Dies gilt, solange sowohl im UE als auch im SO beide Routen belegt sind (vgl. Abbildung der Zeiten), also auch für $q = 1$.[2]

[2] Die Tatsache, dass dies für alle $q \geq 2/3$ gilt, ist bei der praktischen Umsetzung vorteilhaft: eine feste Maut (von 50 Cent, s.u.), wann immer hohes Verkehrsaufkommen herrscht.




Äquivalent ergibt sich das Zeitäquivalent der Maut durch die Differenz der durch die Routenbenutzung verursachten Zunahmen der *Gesamtreisezeit* aller Teilnehmer, welche durch die transformierten CR-Funktionen $\tilde{T}_l(q)$ beschrieben werden, und zwar bei der Belegung im SO (andernfalls würde man "zu viel des Guten tun"):

$$\begin{aligned}
\text{Äquiv}(M_1) &= \tilde{T}_1 - T_1 = 12 + 18qw_1 - (12 + 9qw_1) = 9qw_1 \overset{q=1}{=} 9w_1 \overset{w_1=w_1^{\text{SO}}=7/9}{\underline{\underline{=}}} 7, \\
\text{Äquiv}(M_2) &= \tilde{T}_2 - T_2 = 18qw_2 = 18w_2 = 18\frac{2}{9} = 4.
\end{aligned}$$

Da es bei diskreten Entscheidungsprozessen nur auf Nutzen*differenzen* ankommt, ist dies äquivalent zu Mautkosten

$$M_1^{\text{SO}} = 3, \quad M_2^{\text{SO}} = 0.$$

Bei einem monetarischen Äquivalent von 10 €/h entspricht dies einer Bemautung der Route 1 von 0.5 Euro bzw. $\underline{\underline{\text{50 Cent}}}$.

(e) Im ursprünglichem Nutzergleichgewicht bewirkt die Bemautung, dass die Route 1 um 50 Cent bzw. 3 Minuten unattraktiver wird. Damit reduziert sich der UE-Anteil $w_1^{\text{UE}} = 8/9$, bis das SO bei $w_1^{\text{SO}} = 7/9$ erreicht ist.

Zu beachten ist, dass die Bemautung von der Route *und* von der aktuellen Streckenbelastung abhängig ist. Diese feinteilige Austarierung ist derzeit noch nicht praktisch realisierbar. In deutlich gröberer Form ist eine solche Maut in manchen Städten (z.B. London, Stockholm, San Francisco) als *Citymaut* bereits realisiert: Diese Maut ist routenabhängig (alle Routen, welche durch die City gehen) und meist auch zeitabhängig, wobei die Tageszeit die Verkehrsbelastung zumindest grob abbildet.

## Lösungsvorschlag zu Aufgabe 8.2: Kombinierte Verkehrsmittel- und Routenwahl (stochastische Umlegung)

(a) Es gilt (in Einheiten der Zufallsnutzen-Standardabweichung $1/\lambda = 5\,\text{min}$)):

$$\begin{aligned} V_1 &= -20/5 = -4, \\ V_2 &= (-10 - 3*3)/5 = -3.8, \\ V_3 &= (-15 - 3*3)/5 = -4.8, \\ V_4 &= (-25, -2*3+10)/5 = -4.2, \end{aligned}$$

(b) Der Normierungsnenner beträgt

$$N = \sum_m e^{V_m} = e^{-20/5} + e^{-19/5} + e^{-24/5} + e^{-21/5} = \underline{\underline{0.0639}}.$$

Damit

$$\begin{aligned} P(1) &= e^{V_1}/N = \underline{\underline{0.287}}, \\ P(2) &= e^{V_2}/N = \underline{\underline{0.350}}, \\ P(3) &= e^{V_3}/N = \underline{\underline{0.129}}, \\ P(4) &= e^{V_4}/N = \underline{\underline{0.235}}. \end{aligned}$$

(c) Nun fällt die Alternative 1 weg bzw. $V_1 = -\infty$ während die anderen Nutzen unverändert bleiben. Also ist nun

$$N = \sum_{k=2}^{4} e^{V_k} = \underline{\underline{0.0456}}$$

und damit

$$P(2) = \underline{\underline{0.491}}, \quad P(3) = \underline{\underline{0.180}}, \quad P(4) = \underline{\underline{0.329}}.$$

(d) Für die tägliche Alternativenentscheidung fallen nun für den ÖV keine Kosten an (da man ja die Dauerkarte, z.B. Semesterticket, bereits besitzt). Also ändert sich nun für die ÖV-Alternative der Nutzen zu $V_4 = (-25+10)/5 = -3$, während nach Aufgabenstellung die generischen MIV-Variablen und damit $V_2$ und $V_3$ unverändert bleiben. Also

$$N = \sum_{k=2}^{4} e^{V_k} = \underline{\underline{0.0804}}$$

und damit

$$P(2) = \underline{\underline{0.278}}, \quad P(3) = \underline{\underline{0.102}}, \quad P(4) = \underline{\underline{0.619}}.$$

Die Aufgabenteile (c) und (d) veranschaulichen auch schön die *IIA* Eigenschaft (Independence of irrelevant alternatives) des MNL: Die relative Attraktivität zweier Alternativen $k$ und $l$, $P(k)/P(l) = \exp(V_k - V_l)$ hängt nicht von weiteren Alternativen $m \neq k, l$ ab.

(e) Mehr Sub-Alternativen (Routen) beim Modus MIV bedeuten im Extremfall, dass alle Routen gleiche Reisezeit haben (also z.B. alle im UE genutzten Routen), dass die MIV-Optionen "Vielfach" gezählt werden und sich damit der modellierte MIV-Anteil auf Kosten von ÖV und Rad erhöht. Eine ökonometrisch korrektere Modellierung dieser simultanen Entscheidung würfde auf das *Nested-Logit* Modell zurückgreifen, in welchem Korrelationen bei ähnlichen Alternativen (MIV auf verschiedenen Routen, die sich ggf nur durch eine Kante unterscheiden) explizit enthalten sind und damit die auch als *Red-Bus-Blue-Bus* Paradoxon bezeichnete systematische Verzerrung nicht/verringert auftritt.