

Verkehrsökonomie für Bachelor- Studierende

Sommersemester 2021, Übung Nr. 3

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3.1: Ausbreitung einer neuen Technologie

- (a) Falls $x \ll \beta_2$, gilt $\frac{dx}{dt} = \beta_1 x$, d.h. die Änderungsrate von x ist proportional zu x selbst: "Wer hat, dem wird gegeben". Dies ist unbeschränktes Wachstum und β_1 die Wachstumsrate bzw. $1/\beta_1$ die Wachstumszeit
- (b) – β_2 : Falls $x = \beta_2$, gibt es kein Wachstum mehr, $\frac{dx}{dt} = 0$. Damit ist β_2 der Sättigungswert bzw. die Grenze des Wachstums
– R : Wachstumsfaktor
- (c) Hierzu vergleicht man für $x \ll \beta_2$ die Lösung $x = x_0 e^{\beta_1 t}$ mit der Definition von R :

$$x(\tau) = Rx(0) = x(0)e^{\beta_1 \tau} \Rightarrow R = e^{\beta_1 \tau}$$

- (d) Zwischen Jahr 1 und Jahr 2 war der Gesamt-Wachstumsfaktor 4, in der folgenden Jahresspanne 3.5. Also gilt in der ersten Spanne für alle Zeiten auf jeden Fall $x < \beta_2/3.5$. Wenn man davon ausgeht, dass das Wachstum nicht abrupt sättigt, ist x noch deutlich kleiner, also $x \ll \beta_2$. Damit kann man in der ersten Spanne ungesättigtes Wachstum annehmen und damit $R = 4$ schätzen. Daraus dann $\beta_1 = \ln(R)/1 = 1.38$.
- (e) Die effektive Wachstumsrate ist gegeben durch

$$r = \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = \beta_1 \left(1 - \frac{x(t)}{\beta_2} \right)$$

Diese hat sich auf $\beta_1/2$ halbiert, falls

$$1 - \frac{x}{\beta_2} = 1/2 \Rightarrow x = \frac{\beta_2}{2}$$

Damit ist $\beta_2 = 8$ Fahrten/Person/Jahr

(f) Ähnlich wie in der Vorlesung mit der Kettenregel:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{\beta_2 - x} \right) \frac{dx}{dt} \\ &= \left(\frac{1}{\beta_2 - x} + \frac{x}{(\beta_2 - x)^2} \right) \frac{dx}{dt} \\ &= \left(\frac{\beta_2 - x + x}{(\beta_2 - x)^2} \right) \frac{dx}{dt} \\ &= \left(\frac{\beta_2}{(\beta_2 - x)^2} \right) \frac{dx}{dt} \\ &= \left(\frac{\beta_2}{(\beta_2 - x)^2} \right) \beta_1 x \left(1 - \frac{x}{\beta_2} \right) \\ &= \beta_1 \left(\frac{x}{\beta_2 - x} \right) \\ &= \beta_1 y\end{aligned}$$

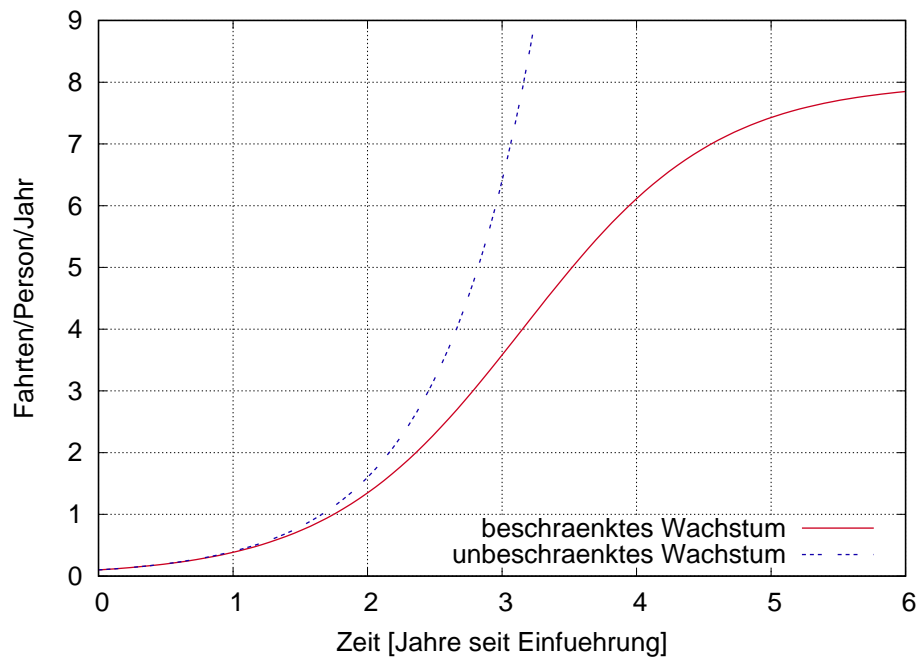
Für $y = x/(\beta_2 - x)$ hat man also *immer* eine Gleichung unbeschränkten Wachstums mit der Lösung $y(t) = y_0 e^{\beta_1 t}$

(g) Mit $y = x/(\beta_2 - x)$ gilt auch $x = \beta_2 y/(1 + y)$ und damit

$$x(t) = \frac{\beta_2 y}{1 + y} = \frac{\beta_2 y_0 e^{\beta_1 t}}{1 + y_0 e^{\beta_1 t}} \quad (1)$$

mit y_0 aus der Anfangsbedingung x_0 für die Wachstumsgröße x gegeben durch $y_0 = x_0/(\beta_2 - x_0)$

Zahlenwerte für die E-Scooter: $\beta_1 = 1.387$, $\beta_2 = 8$, $x_0 = 0.1$ Fahrten/Pers./Jahr, $y_0 = 0.0127$, siehe Plot



Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3.2: Ausbreitung einer neuen Mutante bzw. Ersetzung einer alten durch eine neue Technologie

(a) Differenzengleichung für $y = x_2/x_1$:

$$y(t + \tau) = \frac{R_2 x_2(t)}{R_1 x_1(t)} = \frac{R_2}{R_1} y(t)$$

Auch hier ist die Veränderung von y proportional zu y selbst: "Matthäus-Effekt bzw. exponentielles Wachstum. Analog zur vorherigen Aufgabe gilt damit

$$y(t + \tau) = \frac{R_2}{R_1} y(t) = e^{\mu\tau} y(t) \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = e^{\mu\tau} \text{ bzw. } \mu = \frac{1}{\tau} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$

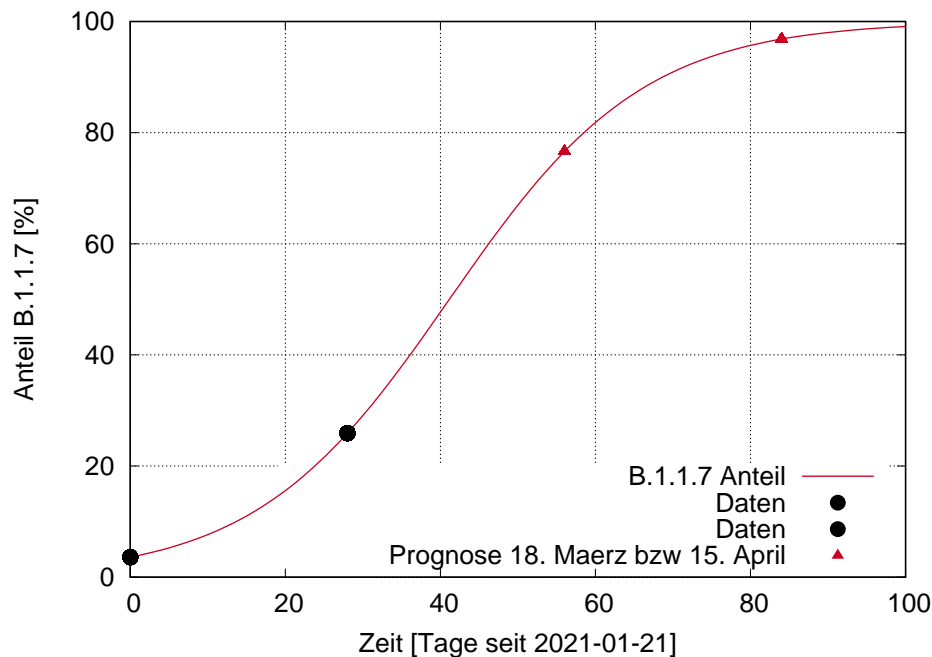
(b) Mit $y(t) = y_0 e^{\mu t} = r/(1-r)$ gilt $r = y/(1+y)$ bzw.

$$r(t) = \frac{y_0 e^{\mu t}}{1 + y_0 e^{\mu t}}, \quad y_0 = \frac{r_0}{1 - r_0}$$

(c) Zahlenwerte:

- B.1.1.7-Anteil zum 21. Januar 2021 ($t = 0$): $r_0 = 0.036$, $y_0 = r_0/(1 - r_0) = 0.0373$
- B.1.1.7-Anteil zum 18. Februar 2021 ($t = 28$): $r_{28} = 0.259$, $y_{28} = r_{28}/(1 - r_{28}) = 0.350$
- Verhältnis der Wachstumsfaktoren nach 28 Tagen: $R_2/R_1 = 0.350/0.0373 = 9.35$
- Reproduktionszahlverhältnis bei 1 Woche Generationszeit: $(R_2/R_1)^{1/4} = 1.75$
- Wachstumsrate in y : $\mu = 1/28 \ln(R_2/R_1) = 0.0799$

Siehe auch folgende Abbildung.



(d) Dies ist dieselbe Problemstellung wie in Gl. (1):

$$x(t) = \frac{\beta_2 y}{1 + y} = \frac{\beta_2 y_0 e^{\beta_1 t}}{1 + y_0 e^{\beta_1 t}}, \quad y_0 = x_0 / (\beta_2 - x_0)$$

mit $\beta_1 = \ln(1.6)/1 \text{ Jahr} = 0.470 \text{ Jahr}^{-1}$, $\beta_2 = 0.8$, $x_0 = 0.07$, $y_0 = x_0 / (\beta_2 - x_0) = 0.0959$
(siehe folgende Abbildung)

