

Verkehrsökonomie für Bachelor- Studierende

Sommersemester 2021, Übung Nr. 3

Allgemeines

Sie müssen in der Klausur keine Differenzialgleichungen Lösen! Sie sollten aber schon, wie in dieser Lösung gezeigt, differenzieren können, einschließlich Produkt- und Kettenregel.

Auf Wunsch einiger Studenten hier ein allgemeiner *Fahrplan* zur Lösung bzw Analyse von **Modellen beschränkten Wachstums**. Dazu bietet sich das Modell der Aufgabe 3.1 bzw 3.2d an, da es allgemeiner ist als das in 3.2a-3.2c (letzteres ist der Spezialfall einer Sättigung bei $\beta_2 = 1$)

1. **Sachverhalt beschränktes Wachstum**: Eine Wachstumsgröße (endogene Variable!) $x(t)$ hat eine anfängliche **relative Wachstumsrate** β_1 und eine **Sättigung** beim Wert β_2 . Die absolute Wachstumsrate $\frac{dx}{dt}$, also Änderung von x mit der Zeit, hängt dann vom aktuellen Wert x selbst ab und ist im einfachsten, hier ausschließlich betrachteten Fall gegeben durch

$$\frac{dx}{dt} = \beta_1 x \left(1 - \frac{x}{\beta_2} \right).$$

Die mathematische Form einer **Differenzialgleichung** kommt also direkt aus dem Sachverhalt!

2. **Transformation**: Dieses Modell kann immer durch Transformation der endogenen Variablen

$$y = \frac{x}{\beta_2 - x}$$

in ein **Modell unbeschränkten Wachstums** mit *derselben* relativen Wachstumsrate β_1 umgewandelt werden:

$$\frac{dy}{dt} = \beta_1 y$$

3. Dieses **Modell unbeschränkten Wachstums** wird *immer* durch die Exponentialfunktion

$$y(t) = y_0 e^{\beta_1 t}$$

gelöst bzw *ist zu dieser äquivalent*. Die Lösung solcher Differenzialgleichungen hat immer einen freien Parameter, hier den Anfangswert $y_0 = y(0)$, also $y(t)$ zum Anfangszeitpunkt $t = 0$.

In manchen Problemstellungen ist nicht die **Wachstumsrate** β_1 sondern der **Wachstumsfaktor** R vorgegeben, der den Quotient der Wachstumsgröße y in aufeinanderfolgenden Zeitspannen der Länge τ angibt:

$$R = \frac{y(t + \tau)}{y(t)} = \frac{y_0 e^{\beta_1(t + \tau)}}{y_0 e^{\beta_1 t}} = e^{\beta_1 \tau}.$$

Ist R vorgegeben, lässt sich umgekehrt $\beta_1 = 1/\tau \ln R$ berechnen.

4. **Rücktransformation:** Mit der Lösung des Modells unbeschränkten Wachstums in y ist durch Rücktransformation auch das Modell beschränkten Wachstums in x gelöst:

$$y = \frac{x}{\beta_2 - x} \Rightarrow x = \frac{\beta_2 y}{1 + y}, \quad x(t) = \frac{\beta_2 y(t)}{1 + y(t)} = \frac{\beta_2 y_0 e^{\beta_1 t}}{1 + y_0 e^{\beta_1 t}}$$

wobei natürlich auch der Anfangswert für y aus dem für x berechnet werden muss: $y_0 = x_0/(\beta_2 - x_0)$. Voilà!

Aufgabe 3.1: Ausbreitung einer neuen Technologie

Das SI-Modell der Infektionsdynamik ist ein Spezialfall der Prozesse mit beschränktem Wachstum, die beim Aufkommen und der Durchsetzung eines neuen Produkts zum Tragen kommen und durch die Differenzialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = \beta_1 x \left(1 - \frac{x}{\beta_2}\right)$$

bzw die Differenzengleichung

$$x(t + \tau) = R x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{\beta_2}\right)$$

beschrieben werden

- Unter welchen Bedingungen wird dies angenähert ein Modell des unbeschränkten Wachstums? Was bedeutet also der Parameter β_1 ?
- Charakterisieren Sie die Parameter β_2 und R
- Stellen Sie nun eine Beziehung zwischen β_1 und R im Grenzfall unbeschränkten Wachstums her.
- Es sei nun $x(t)$ die Nachfrage (Fahrten pro Person und Jahr) des neue Modus "mietbarer E-Scooter". In den ersten drei Jahren seit Zulassung war die Nachfrage 0.1 bzw. 0.4 bzw. 1.4 Fahrten pro Person und Jahr. Begründen Sie, dass sich der E-Scooter im ersten Jahr noch in der unbeschränkten Wachstumsphase befindet und schätzen Sie (ohne Regressionsrechnung) R bzw β_1
- In einem anderen vergleichbaren Land sind E-Scooter schon länger zugelassen und die exponentielle Wachstumsrate hat sich bei $x = 4$ Fahrten/Jahr schon halbiert. Schätzen Sie aus dieser Information β_2
- Stellen Sie eine Differentialgleichung für das verallgemeinerte *Odds-Ratio* $y = x/(\beta_2 - x)$ auf und zeigen Sie, dass das auf die Gleichung $\frac{dy}{dt} = \beta_1 y$ mit der Lösung $y = y_0 e^{\beta_1 t}$ führt.
- Geben Sie nun die Lösung für $x(t)$ an und prognostizieren Sie mit dem Modell die Nachfrage nach E-Scootern im Jahr 10, also in 7 Jahren

Aufgabe 3.2: Ausbreitung einer neuen Mutante bzw. Ersetzung einer alten durch eine neue Technologie

Das gesamte Infektionsgeschehen (Zahl x der Neuinfektionen pro Woche) bzw. das gesamte Marktsegment der Kraftfahrzeuge (Zahl x der Neuwagenkäufe pro Jahr) hat gemeinsame Beschränkungen auf eine Zahl $x = \beta_2$ wie in Aufgabe 1 (durch die Herdenimmunität bzw wenn jeder bereits ein Auto hat). Für die Dynamik der *Verdrängung* des Wildtyps x_1 bzw der alten Technologie kürzt durch eine Mutante/neue Technologie x_2 kürzt sich diese Beschränkung $x_1 + x_2 \leq \beta$ somit heraus und man kann die *relativen* Anteile anhand des Modells des unbeschränkten Wachstums mit den Wachstumsfaktoren (R_2 bzw R_1) bestimmen:

$$\frac{x_2(t + \tau)}{x_1(t + \tau)} = \frac{R_2 x_2(t)}{R_1 x_1(t)}$$

- Stellen Sie die Differenzgleichung für $y(t + \tau) = x_2(t + \tau)/x_1(t + \tau)$ auf und zeigen Sie, dass die umgeformte Differentialgleichung $\frac{dy}{dt} = \mu y$ den Parameter $\mu = 1/\tau \ln(R_2/R_1)$ hat
- Um die gemeinsame Beschränkung auf $x_1 + x_2 \leq \beta_2$ zu berücksichtigen, wird das Verhältnis $y = x_2/x_1 = r/(1 - r)$ nun in den "Marktanteil" $r = x_2/(x_1 + x_2)$ der neuen Mutation/Technologie umgewandelt. Geben Sie die Zeitentwicklung des Marktanteils $r(t)$ für den Anfangswert $r(0) = r_0$ bzw $y_0 = r_0/(1 - r_0)$ an
- Am 21. Januar 2021 war der Anteil der britischen Mutation B.1.1.7 3.6% und am 18. Februar 2021 25.9%. Andere Mutationen sind vernachlässigbar, sodass für den Rest der Wildtyp (ursprünglicher Virus) angenommen werden kann. Wie groß ist das Verhältnis R_2/R_1 der Wachstumsfaktoren der britischen Mutation gegenüber dem Wildtyp? Wie hoch ist gemäß dem Modell der B.1.1.7-Anteil am 18. März und am 15. April 2021?
- Der Anteil der Fahrzeuge mit alternativen Antrieben (BEV, Wasserstoff, Power2Liquid-Treibstoff etc) an den jährlichen Neukäufen ist zur Zeit bei etwa 7% (Verkäufe 2020) und wuchs in den letzten Jahren um etwa 60% jährlich (abgezogen sind Sondereffekte durch die Kaufprämie). Die obere Grenze liegt bei etwa 80%. Schätzen Sie aus diesen Daten die Parameter für ein Modell beschränkten Wachstums und prognostizieren Sie den Anteil im Jahr 2030.