Verkehrsdynamik und -simulation

SS 2021, Lösungsvorschläge zu Übung Nr. 13

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 13.1: LKW an Steigungsstrecken

(a) Antriebsleistung auf ebener Strecke bei Konstantfahrt mit $v = 80/3.6\,\mathrm{m/s}$:

$$P_a = P - P_0 = vF(v) = \mu m g v + \frac{1}{2} c_w \rho_L A v^3 = 253.3\,\mathrm{kW} + 57.1\,\mathrm{kW} = \underline{\underline{310\,\mathrm{kW}}}.$$

Zur Einheit: $[P] = 1\,\mathrm{W} = [vF] = 1\frac{\mathrm{kg\ m^2}}{\mathrm{s^3}}$.

(b) Beim Fahrwiderstand F muss nun auch noch die Trägkeitskraft $m\dot{v}$ und die Hangabtriebskraft $mg\beta$ berücksichtigt werden, so dass die Antriebsleistung nun gegeben ist durch

$$P_a = (\mu g + \beta g + \dot{v}) m v + \frac{1}{2} c_w \rho_L A v^3.$$

Am Anfang der Steigung ist der Wert der Geschwindigkeit derselbe wie in Aufgabenteil (a). Außerdem ist nach der Aufgabenstellung die Antriebsleistung P_a unverändert. Damit erhält man

$$\beta g + \dot{v} = 0 \Rightarrow \dot{v} = -\beta g = \begin{cases} -0.5\,\mathrm{m/s^2} & \text{bei } 5\%\ \text{Steigung,} \\ -0.4\,\mathrm{m/s^2} & \text{bei } 4\%\ \text{Steigung.} \end{cases}$$

Die Endgeschwindigkeit berechnet sich mit derselben Formel für P_a, indem man $\dot{v} = 0$ setzt und außerdem wegen des vernachlässigten Luftwiderstandes auch $c_w = 0$. Damit

$$P_a = (\mu + \beta) g m v \ \Rightarrow\ v_\infty = \frac{P_a}{(\mu + \beta) g m} = \begin{cases} 10.2\,\mathrm{m/s} & \text{bei } 5\%\ \text{Steigung,} \\ 11.7\,\mathrm{m/s} & \text{bei } 4\%\ \text{Steigung.} \end{cases}$$

(c) Da die Geschwindigkeit des OVM sich bei leerer Strecke der "Wunschgeschwindigkeit" v_0 annähert, ist

$$v_0 = v_\infty = \begin{cases} 37\,\mathrm{km/h} & \text{bei } 5\%\ \text{Steigung,} \\ 42\,\mathrm{km/h} & \text{bei } 4\%\ \text{Steigung.} \end{cases}$$

Die anfängliche Beschleunigung bei $t = 0$ des OVM ist gegeben durch

$$\dot{v} = \frac{v_0 - v}{\tau}, \ \Rightarrow\ \tau = \frac{v_0 - v}{\dot{v}}.$$

Dies ergibt

$$\tau = \begin{cases} 24.0\,\mathrm{s} & \text{bei } 5\%\ \text{Steigung,} \\ 26.4\,\mathrm{s} & \text{bei } 4\%\ \text{Steigung.} \end{cases}$$

(d) Zu lösen ist die inhomogene Differenzialgleichung (Dgl)

$$\dot{v} = \frac{v_0 - v}{\tau}$$

mit den Anfangsbedingungen $v_a = 80\,\text{km/h}$. Eine spezielle Lösung der inhomogenen Dgl ist die konstante Lösung $v(t) = v_0$ und die allgemeine homogene Lösung ist wie üblich $v_H(t) = Ce^{-t/\tau}$, so dass die allgemeine Lösung der Dgl lautet:

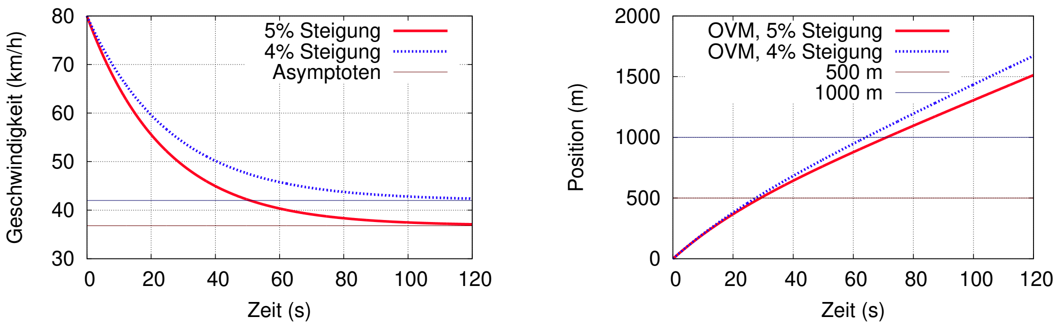
$$v(t) = Ce^{-t/\tau} + v_0\,.$$

Die Konstante ergibt sich aus der Anfangsbedingung v_a zu $C = v_a - v_0$, also

$$v(t) = v_0 + (v_a - v_0)\,e^{-t/\tau}.$$

Die zurückgelegte Strecke $x(t)$ ergibt sich durch eine weitere Integration mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0$:

$$x(t) = v_0\,[t']_{t'=0}^{t'=t} + (v_a - v_0)\left[-\tau e^{-t'/\tau}\right]_{t'=0}^{t'=t} = v_0 t + (v_a - v_0)\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$



(e) Steigung 5%, Länge $L = 500\,\text{m}$. Mit den angegebenen Modellparametern ergibt sich zur Zeit $t = t_1 = 29.1\,\text{s}$:

$$v(t_1) = 13.8\,\text{m/s} = 49.8\,\text{km/h}.$$

Probe zurückgelegte Strecke: $x(t_1) = 500.5\,\text{m}$.

Analog ergibt sich für Steigung 2 bei $t = t_2 = 64.2\,\text{s}$:

$$v(t_2) = 12.6\,\text{m/s} = 45.2\,\text{km/h}.$$

Probe zurückgelegte Strecke: $x(t_2) = 1000.2\,\text{m}$. Obwohl die 500 m lange Steigung steiler ist, werden auf ihr die LKW nicht so langsam wie auf der flacheren 1000 m langen Steigung. Deshalb ist es sinnvoll, die Obergrenzen von Steigungen auf hinreichend lange gleitende Mittel zu beziehen. In der Tat wurde im Jahre 2008 im Handbuch für die Bemessung von Straßenverkehrsanlagen (HBS) diese Länge von 500 m auf 1000 m heraufgesetzt.