

## Verkehrsdynamik und -simulation

### SS 2021, Lösungsvorschläge zu Übung Nr. 10

#### Lösungsvorschlag zu Aufgabe 10.1: Das Stau-Paradoxon

Wir nehmen jeweils zwei versetzte Bereiche derselben Länge  $L$  an (vgl. Abbildung in der Aufgabenstellung):

- einen „langsameren“ Bereich 1 mit höherer Dichte,
- einen „schnelleren“ Bereich 2 mit geringerer Dichte, also  $\rho_1 > \rho_2$ , aber  $V_1 < V_2$ .

Beide Bereiche sind nach Voraussetzung im „gebundenen“ Teil des Fundamentaldiagramms, also  $\rho_2 > \rho_c = 1/(l+v_0T)$  bzw.  $V_2 < V_0$ . Dann gilt, dass die Bereichsgrenzen abrupte Übergänge (Fronten) darstellen, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit durch die "Schockwellenformel" der makroskopischen Modellierung gegeben ist,

$$c = \frac{Q_2 - Q_1}{\rho_2 - \rho_1} = -\frac{l}{T} = \underline{\underline{-5 \text{ m/s}}},$$

wobei die „Staugerade“  $Q(\rho) = (1 - l\rho)/T$  verwendet wurde. Der Zeitanteil, in dem man sich – unabhängig vom Fahrstreifenindex – auf dem jeweils „langsameren“ Fahrstreifen befindet, ist offensichtlich gleich dem Zeitanteil, in dem man sich in Bereichen vom Typ 1 befindet:

$$p_{\text{langsamer}} = p_1 = \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_2}.$$

Hier gibt  $\tau_i$  die Zeit an, welche man braucht, um einen der sich – entgegen der Fahrtrichtung – bewegenden Bereiche vom Typ  $i$  zu durchqueren. Die Relativgeschwindigkeit zu den Übergängen ist also  $V_i + |c|$ . Damit gilt

$$p_1 = \frac{\frac{L}{V_1 + |c|}}{\frac{L}{V_1 + |c|} + \frac{L}{V_2 + |c|}} = \frac{V_2 + |c|}{V_2 + V_1 + 2|c|}.$$

Zum Beispiel gilt für  $V_1 = 0$  und  $V_2 = 10 \text{ m/s}$ :

$$p_1 = \frac{10 + 5}{10 + 10} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}.$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 % befindet man sich in diesem Fall auf dem langsameren Fahrstreifen – egal, ob man nun wechselt oder nicht!

Alternativ kann man diese Aufgabe auch lösen, indem man die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt, dass ein beliebig herausgepicktes Auto im Bereich 1 fährt. Dies ist offensichtlich proportional zum Anteil der Fahrzeuge im Bereich 1, welcher – da die beiden Bereiche dieselbe Ausdehnung  $L$  haben – durch den Dichtequotienten gegeben ist:

$$p_1 = \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} = \frac{200}{200 + 200/3} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}.$$

**Aufgabe 10.2: Nur in Englisch!****Lösungsvorschlag zu Aufgabe 10.3: Allgemeines Entscheidungsmodell**

- (a) Man bremst nur vor einer von "Grün" auf "Gelb" schaltenden Ampel, wenn die dadurch resultierende maximale Bremsverzögerung kleiner als die sichere Verzögerung  $b_{\text{safe}}$  ist. In sinnvollen Modellen wie dem IDM wird die Situation anfangs "unter Kontrolle" gebracht, d.h. so gebremst, dass man mit der komfortablen Verzögerung in der Endphase stoppen kann. Also ist die Verzögerung anfangs am höchsten, so dass man direkt den Anfangsabstand  $s$  und die Anfangsgeschwindigkeit  $v$  nehmen kann: Bremsen nur, falls die Anfangsbeschleunigung  $\dot{v}_{\text{IDM}}(s, v, 0) < -b_{\text{safe}}$ .
- (b) Im Falle der roten Ampel (stehendes virtuelles Vorderfahrzeug) gilt  $v_l = 0$ . Dann ergibt sich allgemein der Mindestabstand für den Fall "Abbremsen" wie folgt:

$$\begin{aligned} \dot{v} = a_{\text{free}}(v) - a \left( \frac{s^*(v, v_l)}{s} \right)^2 &> -b_{\text{safe}} \\ a \left( \frac{s^*(v, v_l)}{s} \right)^2 &< b_{\text{safe}} + a_{\text{free}} \\ a \frac{(s^*(v, v_l))^2}{b_{\text{safe}} + a_{\text{free}}} &< s^2 \end{aligned}$$

wobei

$$a_{\text{free}}(v) = 1 \left[ 1 - \left( \frac{v}{v_0} \right)^4 \right]$$

die freie IDM-Beschleunigung darstellt. Damit wird der Mindestabstand allgemein zu

$$s > s_{\text{safe}}(v) = s^*(v, 0) \sqrt{\frac{a}{b_{\text{safe}} + a_{\text{free}}}}. \quad (1)$$

Für  $a = b = b_{\text{safe}}$  und  $v = v_0$ , also  $a_{\text{free}}(v_0) = 0$ , vereinfacht sich dies zu

$$s > s_{\text{safe}}(v) = s^*(v, 0) = s_0 + v_0 T + \frac{v_0^2}{2b},$$

also genau zum Anhalteweg bei der Bremsverzögerung  $b = b_{\text{safe}}$ , wenn die Folgezeit  $T$  gleich der Reaktionszeit gesetzt wird!

Zahlenwerte:

- $v_0 = 50 \text{ km/h}$  :  $s_{\text{safe}} = s^*(v_0, 0) = 62 \text{ m}$
- $v_0 = 70 \text{ km/h}$  :  $s_{\text{safe}} = s^*(v_0, 0) = 114 \text{ m}$

- (c) Die obigen Abstandswerte sind zu groß (z.B. müsste bei 50 km/h die Ampel 4.7 s "gelb" sein, um ein Darüberfahren bei "Rot" zu vermeiden), da üblicherweise beim Ampelstopp

im "Worst case" eine größere Verzögerung verlangt wird. Für  $a = b$  und  $v = v_0$ , aber  $b_{\text{safe}} \neq b$  (i.A.  $b_{\text{safe}} > b$ ) folgt aus der allgemeinen Formel (1) der minimale Abstand für "Anhalten" gemäß

$$s_{\text{safe}} = s^*(v, 0) \sqrt{\frac{a}{b_{\text{safe}}}}$$

Für  $b_{\text{safe}} = 4 \text{ m/s}^2$  werden die Gelbzeiten eingehalten (vgl. Aufgabe über die Mindest-Gelbzeiten). Allgemein gilt:

- erhöht man  $b_{\text{safe}}$ , erniedrigt sich  $s_{\text{safe}}$
- erhöht man  $b$  und erniedrigt dadurch  $s^*$ , erniedrigt sich  $s_{\text{safe}}$  ebenfalls

(d) Für das OVM gilt der kritische Abstand

$$\dot{v}_{\text{OVM}} = \frac{v_{\text{opt}}(s) - v}{\tau} < -b_{\text{safe}}$$

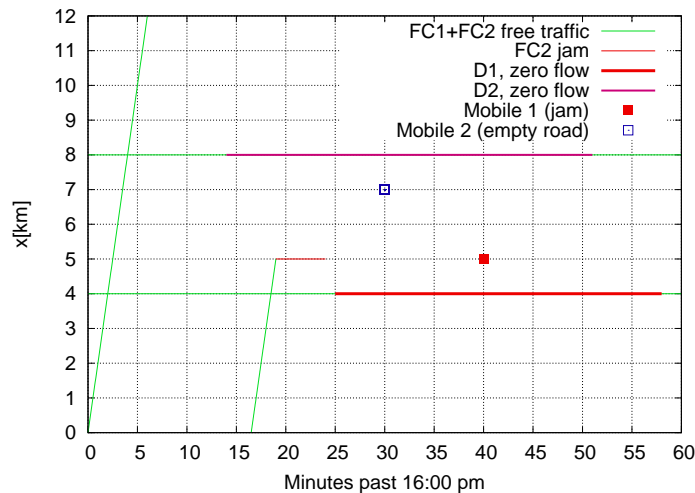
Offensichtlich muss man sich im gebundenen Bereich befinden, d.h. beim dreieckigem Fundamentaldiagramm  $v_e(s) = \min(s/T, v_0)$  ist nur der erste Term relevant. Also

$$\dot{v}_{\text{OVM}} = \frac{s/T - v}{\tau} > -b_{\text{safe}}$$

bzw  $s > s_{\text{safe}} = T(v - \tau b_{\text{safe}})$  Bei  $v = v_0 = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$ ,  $\tau = T/2 = 0.5 \text{ s}$  und  $b_{\text{safe}} = 2 \text{ m/s}^2$  erhält man  $s_{\text{safe}} = 9.5 \text{ m}$ : Wenn man dann noch bremst, ist selbst bei einer Vollbremsung ein Überfahren der Haltelinie sicher! (Bremsweg 20 m bei gleichmäßiger Verzögerung mit der maximalen Verzögerung  $\approx g \approx 10 \text{ m/s}^2$ ). Vergleich: Beim IDM erhielte man mit  $b = b_{\text{safe}} = 2 \text{ m/s}^2$  einen Grenzabstand von  $s_{\text{safe}} = 120 \text{ m}$ .

### Lösungsvorschlag zu Aufgabe 10.4: Rekonstruktion des Unfallortes und der Zeit

(a) Raum-Zeit-Diagramm: Eindeutig freier Verkehr ist jeweils grün und dünn gekennzeichnet, alle anderen Informationen dick mit anderen Farben.



- (b) Durch das erste Floating Car (FC1) ist die Geschwindigkeit im freien Verkehr mit 120 km/h oder 2 km pro Minute bekannt. Durch das zweite Floating Car (FC2) wissen wir, dass eine stromaufwärtige Staufront um 16:19 den Ort  $x = 5$  passiert.

Anhand der stationären Detektoren D1 bei 4 km und D2 bei 8 km kann man bei verschwindenden Fluss nicht entscheiden, ob die Fahrbahn nun leer ist oder ob Stau herrscht (dies würde selbst für Detektoren mit Geschwindigkeitsmessung gelten!). Da aber FC2 stromabwärts von D1 einen Stau gemeldet hat, ist ein starkes Indiz dafür, dass D1 einen Stau detektiert, die Staufront kommt also um 16:25 bei  $x = 4$  km vorbei.

Damit ist die Geschwindigkeit der stromaufwärtigen Staufront durch

$$c^{\text{up}} = \frac{-1 \text{ km}}{6 \text{ min}} = -10 \text{ km/h}$$

gegeben (vgl. folgende Abbildung).

Das an D2 bei  $x = 8$  km um 16:14 detektierte Verschwinden des Flusses ist nicht konsistent mit dem Passieren der stromaufwärtigen Staufront, da diese den Ort von D2 bereits um 16:01 passiert haben müsste. Selbst wenn man von der Annahme einer konstanten Geschwindigkeit  $c^{\text{up}}$  der stromaufwärtigen Staufront abrückte: Die negativste mögliche Geschwindigkeit  $c^{\text{up}}$  (bei Maximalzufluss, der auf eine Vollsperrung trifft) ist betragsmäßig kaum höher als  $|c^{\text{down}}|$ . Insbesondere ist ein Wert von  $-4 \text{ km}/5 \text{ min}$  nicht möglich. Dies ist ein starkes Indiz dafür, dass D2 ab 16:14 einen leeren Streckenabschnitt detektiert, die Streckensperrung also weiter stromaufwärts liegt.

Der Ort und der Zeitpunkt der Streckensperrung liegt damit auf den Schnittpunkt der Gleichung der stromaufwärtigen Staufront ( $x$  in km und  $t$  in Minuten ab 16:00)

$$x^{\text{up}}(t) = 4 + c^{\text{up}}(t - 25) = 4 - (t - 25)/6$$

mit der Trajektorie  $x_{\text{last}}(t)$  des letzten, vor der Sperrung durchkommenden Fahrzeugs, welche im Orts-Zeit-Diagramm parallel zu FC1 liegt. Dieses kommt offensichtlich zur Zeit 16:14 bei  $x = 8$  km an und hat damit die Trajektoriengleichung

$$x_{\text{last}}(t) = 8 + v_0(t - 14) = 8 + 2(t - 14)$$

Mit  $x^{\text{up}}(t) = x_{\text{last}}(t)$  ergeben sich Ort und Zeitpunkt der Sperrung:

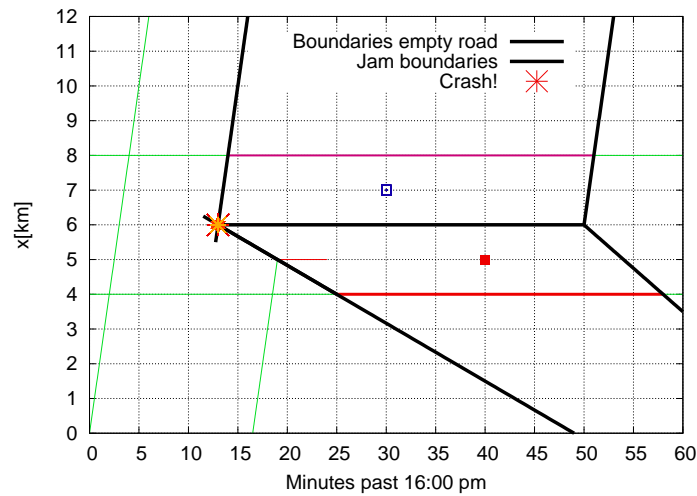
$$x_{\text{crash}} = \underline{\underline{6 \text{ km}}}, \quad t_{\text{crash}} = \underline{\underline{16 : 13}}.$$

- (c) Nach der Aufhebung der Streckensperrung bewegt sich eine stromabwärtige Staufront gegen die Fahrtrichtung mit der universellen Geschwindigkeit von  $c^{\text{down}} = -15 \text{ km/h} = -\frac{1 \text{ km}}{4 \text{ min}}$ . Da der Detektor bei  $x = 4$  km um 16 : 58 h wieder einen Verkehrsfluss misst, lautet die Gleichung

$$x^{\text{down}}(t) = 4 + c^{\text{down}}(t - 58).$$

Der Unfallort bei  $x_{\text{crash}} = 6 \text{ km}$  ergibt damit eine Aufhebung der Sperrung um

$$t_{\text{aufl}} = 16 : 50 \text{ h}.$$



*Hinweis:* Da wir eine konstante stromaufwärtige Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c^{up}$  angenommen haben (was konstanten Zufluss impliziert), ist Detektor D2 hier für die Aufklärung gar nicht nötig. Lässt man aber variable Werte von  $c^{up}$  zu, ist die Information von D2 zur Bestimmung des Unfallortes notwendig, analog zur Aufgabe im Skript.