Verkehrsdynamik und -simulation

SS 2021, Lösungsvorschläge zu Übung Nr. 9

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 9.1: Beschleunigen und Bremsen zwischen zwei Lichtsignalanlagen

(a) Modellparameter:

- v_0=Wunschgeschwindigkeit und τ=Geschwindigkeitsanpassungszeit, da auf leerer hindernisfreier Strecke die Ungleichungsbedingung des Modells immer erfüllt ist und damit das Modell für diesen Fall zum *Optimal Velocity Model* (OVM) wird.
- s_0=Mindest- bzw. Halteabstand und b ist die konstante Bremsverzögerung beim Annähern ($\Delta v > 0$) an langsamere Fahrzeuge oder Ampeln.

Das Modell berücksichtigt *keine* Reaktionszeit, was v.a. für das Anfahren und Bremsen wesentlich ist. [Ferner wird keine Folgezeit berücksichtigt, d.h. die Fahrer können sich den Vorderfahrzeugen bei gleichmäßigem Verkehr ($\Delta v \approx 0$) bis auf den Abstand s_0 nähern.]

(b) Hier ist die Ungleichung immer erfüllt (die zweite Ampel ist grün und/oder weit weg). Zu lösen ist also die DGL

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{v_0 - v}{\tau}, \quad \text{mit} \quad v(0) = 0.$$

(i) Geschwindigkeit:

Wie üblich ergibt sich die Lösung aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung $v_H(t)$ und *einer* speziellen Lösung der vollen inhomogenen Gleichung, z.B. $v_I(t) = v_0$. Mit dem Exponentialansatz erhält man die homogene Lösung proportional zu $e^{-t/\tau}$, also

$$v(t) = v_H(t) + v_I(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + v_0.$$

Aus den Anfangsbedingungen $v(0) = 0$ ergibt sich die Integrationskonstante zu $A = -v_0$ und damit

$$v(t) = \underline{\underline{v_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}}.$$

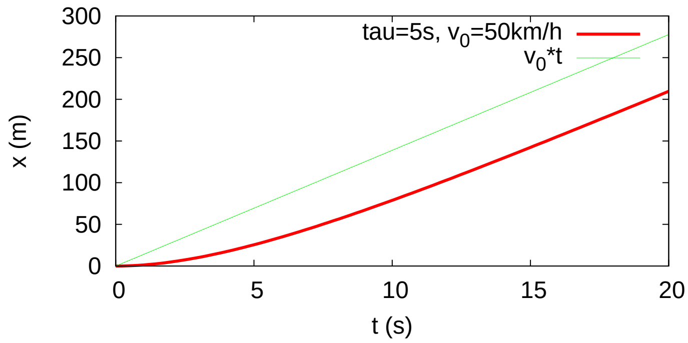
(ii) Ort:

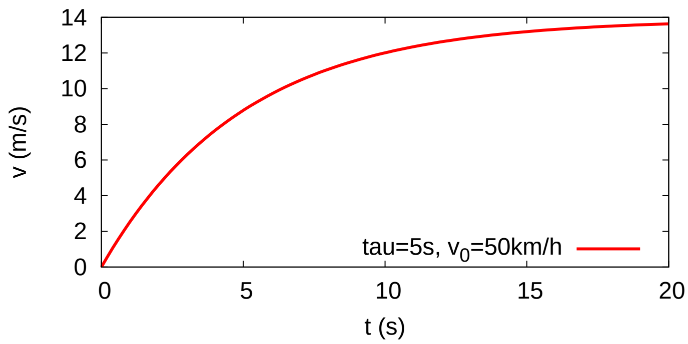
Mit $x(0) = 0$ ergibt sich

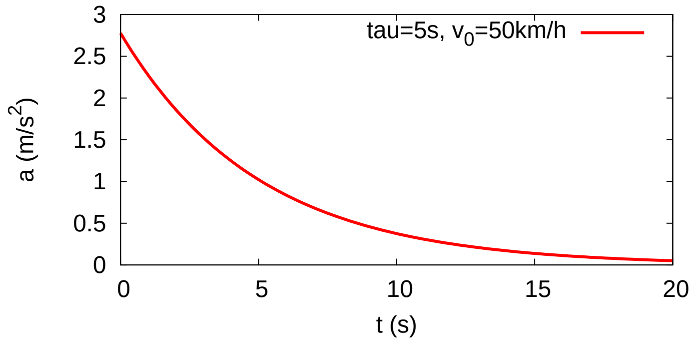
$$\begin{aligned}
x(t) &= \int_0^t v(t')\,\mathrm{d}t' \\
&= v_0 \int_0^t \left(1 - e^{-\frac{t'}{\tau}}\right)\,\mathrm{d}t' \\
&= v_0 \left[t' + \tau e^{-\frac{t'}{\tau}}\right]_{t'=0}^{t'=t} \\
&= v_0 t + v_0 \tau \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right) \\
&= \underline{\underline{v_0 t - v(t)\tau}}
\end{aligned}$$

<u>(iii) Beschleunigung:</u>

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{v_0 - v(t)}{\tau} = \frac{v_0\left(1 - 1 + e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}{\tau} = \underline{\underline{\frac{v_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}}}$$







(c) Es wird mit Bremsen begonnen, wenn die Grenze der Ungleichung erreicht ist:

$$\Delta v = \sqrt{2b(s-s_0)}.$$

Die Ampel stellt ein "stehendes Hindernis" dar, also $\Delta v = v$. Löst man das nach s auf, erhält man für den Abstand $s = s_c$ bei Bremsbeginn:

$$s = s_c = s_0 + \frac{v^2}{2b} = \underline{\underline{50.2\text{ m}}}.$$

Die Bremsverzögerung ist gleich $-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \underline{\underline{b}}$. Da der Bremsweg bei konstanter Verzögerung b durch $\Delta x = v^2/(2b)$ gegeben ist, kommt das Fahrzeug im Abstand $\underline{\underline{s = s_0}}$ zum Stehen.

(d) Zunächst wird der Ort x_c bestimmt, an dem das Fahrzeug zu bremsen beginnen muss. Aus dem vorhergehenden Aufgabenteil ist bekannt, dass im Abstand $s = s_c$ vor der Ampel zu bremsen begonnen werden muss, falls das Fahrzeug davor mit $v = v_0$ fährt. Da dies nach Voraussetzung angenähert erfüllt ist (die Überprüfung dieser Annahme kann erst *a posteriori* erfolgen!), gilt für den Ort des Bremsbeginns

$$x_c = L - s_c = L - s_0 - \frac{v^2}{2b} \approx 450\,\text{m},$$
$$v_c \approx v_0$$

(Die genaue Lösung $x_c = 449.8$ m würde wegen der Annahme $v(t_c) = v_0$ eine nicht gegebene Genaugkeit vorspiegeln!).

Nun wird aus der Trajektorie der Beschleunigungsphase, $x(t) = v_0 t - v(t)\tau$ die Zeit t_c beim Beginn der Bremsphase bestimmt:

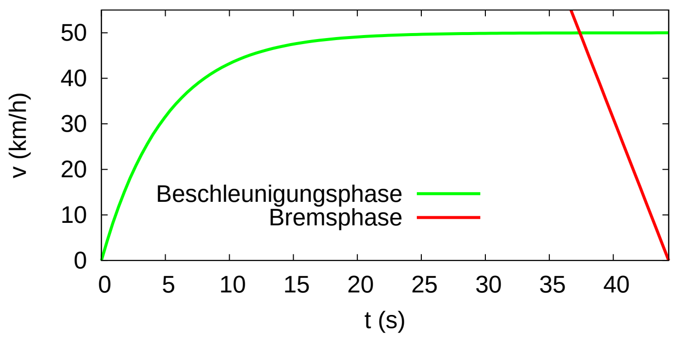
$$x_c(t_c) = v_0 t_c - v(t_c)\tau \approx v_0(t_c - \tau) \quad \Rightarrow \quad t_c = \frac{x_c}{v_0} + \tau = 32.4\,\text{s} + 5.0\,\text{s} = \underline{\underline{37.4\text{ s}}}.$$

Damit ist auch die Zeit bekannt, bei der das Fahrzeug wieder stoppt:

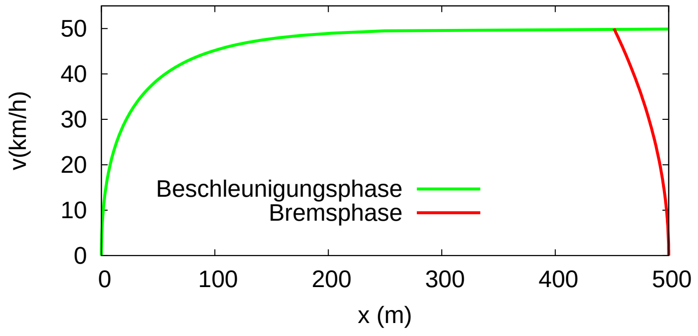
$$t_{\text{stop}} = t_c + \frac{v_0}{b} = \underline{\underline{44.3\text{ s}}}.$$

Damit ist der gesamte Geschwindigkeitsverlauf gegeben (siehe Plots):

$$v(t) = \begin{cases} v_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) & 0 \le t < t_c \\ v_0 - b(t - t_c) & t_c \le t \le t_{\text{stop}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



50
40
30
20
10
0
v (km/h)
Beschleunigungsphase
Bremsphase
0
5
10
15
20
25
30
35
40
t (s)



50
40
30
20
10
0
v(km/h)
Beschleunigungsphase
Bremsphase
0
100
200
300
400
500
x (m)

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 9.2: Full Velocity Difference Model

(a) Das erste Auto (schwarze Trajektorie) fährt die meiste Zeit der Fahrtzeit $\tau_{12} \approx 200\,\mathrm{s}$ zwischen den beiden LSA mit der Geschwindigkeit $v_\infty = 13.5/3.6\,\mathrm{m/s} = 3.75\,\mathrm{m/s}$. Damit ist der Abstand ungefährt gegeben durch

$$\Delta x_{\text{LSA1-LSA2}} \approx \tau_{12} v_\infty = 750\,\mathrm{m}.$$

(b) Hinreichend weit entfernt vom stehenden Hindernis gilt $v_{\text{opt}}(s) \to v_0$, unabhängig von der verwendeten Funktion für $v_{\text{opt}}(s)$. Für $v_l = 0$ bzw. $\Delta v = v$ (rote Ampel) lautet damit die Beschleunigungsgleichung des FVDM

$$\dot{v} = \frac{v_0 - v}{\tau} - \gamma v = \frac{v_0}{\tau} - \left(\frac{1}{\tau} + \gamma\right) v.$$

Dies ist eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung. Insbesondere wird die Beschleunigung bei der Geschwindigkeit

$$v_\infty = \frac{v_0}{1 + \gamma\tau} = \frac{v_0}{4} = 3.75\,\mathrm{m/s}$$

gleich Null. Für ein anfangs stehendes bzw langsamer als mit v_∞ fahrendem Fahrzeug stellt diese Geschwindigkeit die maximale Geschwindigkeit dar, in Übereinstimmung mit der Abbildung der Aus=fgabenstellung. Das VDIFF Modell ist also *nicht vollständig*, da es freien Verkehr mit einem sehr weit entfernten Hindernis nicht beschreiben kann!

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 9.3: Reaktion auf einscherende Fahrzeuge und auf eine rot werdende Ampel

(a) Einscherendes Fahrzeug:

Reaktion beim IDM:

Das IDM hat die Beschleunigungsgleichung

$$\dot{v}_{\text{IDM}} = a\left[1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^{\delta} - \left(\frac{s^*}{s}\right)^2\right] \tag{1}$$

mit dem "Wunschabstand" s^*

$$s^* = s_0 + vT + \frac{v\Delta v}{2\sqrt{ab}}. \tag{2}$$

Da nur jeweils ein Fahrzeug betrachtet wird, ist der Fahrzeugindex α weggelassen.

(i) *Bestimmen des Gleichgewichtsabstandes vor dem Einscheren:*

Vor dem Einscheren herrscht im Gleichgewicht $\dot{v} = 0$ und die Differenzgeschwindigkeiten sind ebenfalls $\Delta v = 0$. Damit ergibt sich aus den IDM-Gleichungen

$$0 = 1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^{\delta} - \left(\frac{s_0 + vT}{s}\right)^2,$$

und nach Auflösen bezüglich $s = s_e(v)$ der Gleichgewichtsabstand als Funktion der Geschwindigkeit

$$s = s_e(v) = \frac{s_0 + vT}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^{\delta}}} = 22.7\,\text{m}.$$

(ii) *Beschleunigung als Reaktion des Einschervorgangs*

Nun ist die neue Lücke nur noch $s = s_e/2 = 11.4\,\text{m}$. Ferner ist nach Aufgabenstellung die Geschwindigkeit des einscherenden Fahrzeugs $v_l = v$, also $\Delta v = 0$. Direkt eingesetzt in die IDM-Beschleunigungsformel erhält man

$$\begin{aligned} s^* &= s_0 + vT + \frac{v', \Delta v}{2\sqrt{ab}} = s_0 + vT = 22\,\text{m}, \\ \dot{v}_{\text{IDM}} &= a\left[1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^{\delta} - \left(\frac{s^*}{s}\right)^2\right] = -2.81\,\text{m/s}^2. \end{aligned}$$

Führt man das Ganze zunächst allgemein ohne Einsetzen der Zahlenwerte durch, sieht man, dass dieses Ergebnis nicht von s_0, T oder b abhängt, sondern nur von $a = 1\,\text{m/s}^2$

und $\delta = 4$:

$$\begin{aligned}
\dot{v}_{\text{IDM}} &= a\left[1-\left(\frac{v}{v_0}\right)^\delta-\left(\frac{s_0+vT}{s}\right)^2\right] \\
&\overset{(v=v_0/2, s=s_e/2)}{=} a\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^\delta-\left(\frac{s_0+\frac{v_0T}{2}}{s_e/2}\right)^2\right] \\
&= -3a\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^\delta\right] \\
&= -\frac{45}{16}\ \text{m/s}^2 = \underline{\underline{-2.81\ \text{m/s}^2.}}
\end{aligned}$$

Reaktion beim Gipps-Modell:

Das Gipps-Modell ist formuliert als Differenzengleichung

$$v(t+\Delta t) = \min(v + a\Delta t, v_0, v_{\text{safe}}), \tag{3}$$

mit der von der Geschwindigkeit v_p des Vorderfahrzeugs abhängigen "sicheren" Geschwindigkeit

$$v_{\text{safe}} = -b\Delta t + \sqrt{b^2(\Delta t)^2 + v_p^2 + 2bs}. \tag{4}$$

Oft wird der Zeit-Updateschritt Δt, hier $\Delta t = 1$s, als eine Reaktionszeit interpretiert. Er ist aber tatsächlich eine Folgezeit im Kolonnenverkehr (siehe Skript) und, wie diese Aufgabe zeigt, gleichzeitig eine Geschwindigkeitsanpassungszeit.

(i) *Bestimmen des Gleichgewichtsabstandes vor dem Einscheren:*

Es gilt $v_p = v = \frac{v_0}{2}$ sowie $v(t-\Delta t) = v$. Damit fallen die ersten beiden Geschwindigkeiten in der Minimums-Bedingung (3) weg und man erhält für den Gleichgewichtsabstand $s_e(v)$ die Bedingung

$$v = v_{\text{safe}} = -b\Delta t + \sqrt{b^2(\Delta t)^2 + v^2 + 2bs_e}.$$

Umformen ergibt

$$(v + b\Delta t)^2 = b^2(\Delta t)^2 + v^2 + 2bs_e \quad \Rightarrow \quad s_e(v) = v\Delta t.$$

Der Gleichgewichtsabstand ist also in etwa gleich dem des IDM für den IDM-Folgezeitparameter $T = 1$ s. (Dies gilt exakt für $s_0 = 0$ und $\delta \to \infty$).

(ii) *Beschleunigung als Reaktion des Einschervorgangs*

Vor dem Einscheren gilt $v = v_0/2$ und $s = (v_0\Delta t)/2$. Genau zum Zeitpunkt t werde nun eingeschert, so dass der Abstand zum Berechnen der neuen Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ durch den halben Gleichgewichtsabstand $s = (v_0\Delta t)/4$ gegeben ist.

Wieder sind im Gipps-Modell (3) die Geschwindigkeiten v_0 und $v + a\Delta t$ irrelevant, da höher als v_{safe}. Die neue Geschwindigkeit aufgrund des "Sicherheitskriteriums" ist

$$v(t+\Delta t) = v_{\text{safe}} = -b\Delta t + \sqrt{b^2(\Delta t)^2 + \left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + \frac{bv_0\Delta t}{2}} = \underline{\underline{19.07\text{m/s}}}.$$

Damit ergibt sich eine effektive Beschleunigung von

$$\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{Gipps}} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \approx \underline{\underline{-0.93\ \text{m/s}^2.}}$$

Das Gipps-Modell reagiert also auf Spurwechsel "sehr cool" und bremst verhältnismäßig wenig als Reaktion auf den nur noch halben Sicherheitsabstand. Auch die IDM-Verzögerung hält sich im Rahmen, während z.B. das OVM unverhältnismäßig hohe Verzögerungen erzeugen würde. Sowohl das Gipps-Modell als auch das IDM würde deutlich höhere Verzögerungen erzeugen für den Fall, dass das einscherende Fahrzeug langsamer wäre, denn dann wäre "Gefahr im Verzug"!

(b) Ampel wird rot

Reaktion beim Gipps-Modell:

Zum Zeitpunkt t gilt $v = v_0 = 15$ m/s, $v_p = 0$, $s = 50$ m. Damit ist

$$v_{\text{safe}} = -b\Delta t + \sqrt{b^2(\Delta t)^2 + 2bs} = 12.3\text{m/s}.$$

Damit ist in der ersten Sekunde

$$\dot{v}_{\text{Gipps}} = \frac{v_{\text{safe}} - v}{\Delta t} = \underline{\underline{-2.72\ \text{m/s}^2.}}$$

und danach immer $\dot{v} = -b$. Es wird also in der nächsten Sekunde die Situation "unter Kontrolle" gebracht, mit einer weiteren Annäherung mit $\dot{v} = -2\text{m/s}^2$, bevor das Fahrzeug unfallfrei (bzw. ohne die Ampel zu überfahren) zum Stillstand kommt.

Reaktion beim IDM:

Einsetzen ergibt mit $\Delta v = v$ einen Wunschabstand von

$$s^* = s_0 + vT + \frac{v^2}{2\sqrt{ab}} \approx 96.5\,\text{m}.$$

Der Bremsterm des IDM ergibt damit

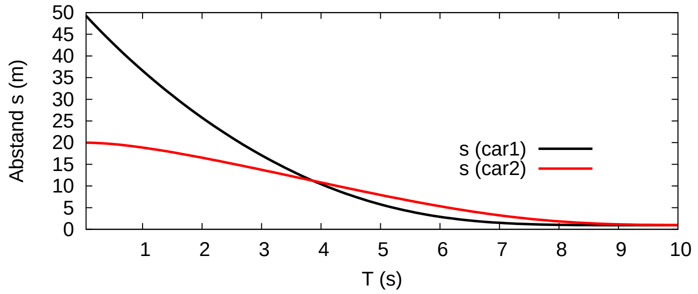
$$\dot{v}_{\text{IDM}} = -a\left(\frac{s^*}{s}\right)^2 = \underline{\underline{-3.73\ \text{m/s}^2.}}$$

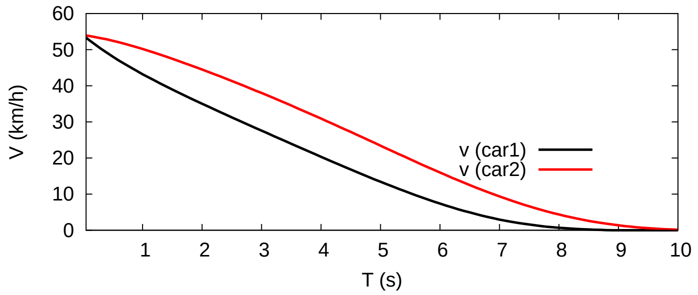
Folgende Abbildungen zeigen den Bremsvorgang des betrachteten Fahrzeugs und eines weiteren, im Abstand von anfänglich 20 m folgenden:

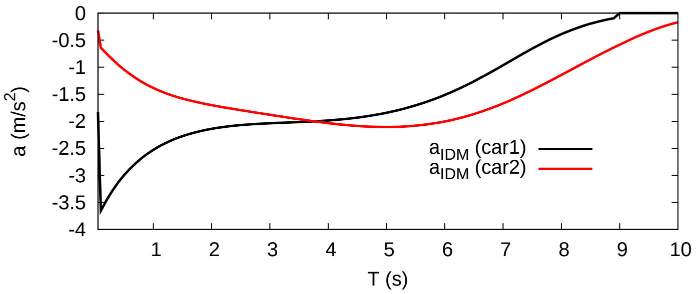
- Am Anfang wird durch verstärktes Bremsen (Verzögerung maximal $3.73\,\mathrm{m/s^2}$) die Situation "unter Kontrolle" gebracht. Im Unterschied zum Gipps-Modell ist die Zeitspanne dafür nicht fest (d.h. nicht wie beim Gipps Modell gleich Δt), sondern hängt von der Situation ab.

- Danach wird mit etwa der komfortablen Verzögerung, hier $b = 2\,\mathrm{m/s^2}$, bis zum Stillstand weitergebremst. Kurz vor dem Stillstand geht die Beschleunigung allmählich herunter, so dass der *Ruck* (Ableitung der Beschleunigung) begrenzt bleibt.

- Nachfolgende Fahrzeuge bremsen im Wesentlichen mit Verzögerungen, welche b nicht wesentlich überschreiten.







Lösungsvorschlag zu Aufgabe 9.4: Siehe engl. Loesung