

Verkehrsdynamik und -simulation

SS 2024, Lösungsvorschläge zu Übung Nr. 8

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 8.1: Faustregel für Abstand und Bremsweg

- (a) Zunächst mal wächst der Abstand gemäß der Regel "Abstand gleich halber Tacho" proportional zur Geschwindigkeit. Damit ist der Quotient $T = s/v$, also die gesuchte Folgezeit, unabhängig von der Geschwindigkeit! Den Zahlenwert erhält man durch einfaches Einsetzen, wobei man aber sorgfältig auf die Einheiten achten muss:

$$\begin{aligned}\text{Abstand in m} &= \frac{1}{2}(\text{Geschwindigkeit in km/h}) \\ \frac{s}{m} &= \frac{1}{2} \left(\frac{v}{\text{km/h}} \right),\end{aligned}$$

also

$$T = \frac{s}{v} = \frac{\frac{1}{2}m \left(\frac{v}{\text{km/h}} \right)}{v} = \frac{\frac{1}{2}m}{\text{km/h}} = \frac{0.5 \text{ h}}{1000} = \frac{1800 \text{ s}}{1000} = \underline{\underline{1.8 \text{ s}}}.$$

Bemerkung:

Die entsprechende USA-Regel lautet übrigens: "For every ten miles per hour you drive faster, add a car length to your safety gap". Es ist nicht klar, wie lang das "car" sein soll. Wir nehmen mal einen USA-Straßenkreuzer mit $l_{\text{car}} = 5 \text{ m}$ an. Schließlich wurde diese Regel zu Zeiten billigen Öls formuliert. Also mit der üblichen Bezeichnung mph für "Miles per hour":

$$T = \frac{s}{v} = \frac{l_{\text{car}}}{10 \text{ mph}} = \frac{5 \text{ m}}{10 \text{ mph} \cdot 1.6 \frac{\text{km/h}}{\text{mph}} \cdot \frac{1 \text{ m/s}}{3.6 \text{ km/h}}} = \frac{5 \text{ m} \cdot 3.6 \text{ s/m}}{16} = \underline{\underline{\frac{18}{16} \text{ s}}}.$$

Dies ist ein deutlich kürzerer Abstand. Erst bei Fahrzeuglängen von etwa 8 m würde die europäische Abstandsregel resultieren.

Insgesamt hat der Modellparameter T (Folgezeit) plausible Werte zwischen $T = 0.3 \text{ s}$ (extrem aggressiver Fahrer) und $T = 3 \text{ s}$ ("Sonntagsfahrer").

- (b) Die Faustformel "Bremsweg gleich Quadrat der Geschwindigkeit durch 100" für den Bremsweg s in Abhängigkeit der Geschwindigkeit v lautet unter Berücksichtigung der implizit (also unbewusst) vorausgesetzten Einheiten m und km/h:

$$\frac{s}{m} = 0.01 \left(\frac{v}{\text{km/h}} \right)^2$$

Wir bestimmen den Bremsweg am einfachsten, indem wir den Bremsvorgang im Gedanken "rückwärts" in der Zeit ablaufen lassen, also mit einem bei $x = 0$ stehenden Fahrzeug starten, welches ab dem Zeitpunkt $t = 0$ konstant mit b beschleunigt. Es gilt also

$$x(0) = v(0) = 0$$

und damit als Funktion der rückwärts laufenden Zeit:

$$\begin{aligned} v(t) &= v(0) + bt = bt, \\ s(t) &= s(0) + v(0)t + \frac{1}{2}bt^2 = \frac{1}{2}bt^2. \end{aligned}$$

Durch Eliminieren der Zeit aus der ersten Gleichung, $t = v/b$, und Einsetzen in die zweite, erhält man die quadratische Abhängigkeit des Weges von v :

$$s = \frac{v^2}{2b}.$$

Lässt man diesen Vorgang "rückwärts" in der Zeit ablaufen, hat man den Bremsweg anstelle des Beschleunigungsweges. Nun Vergleich mit der Faustformel:

"Bremsweg (in m) = Quadrat der Geschwindigkeit (in km/h) durch 100":

$$\begin{aligned} b = \frac{v^2}{2s} &= \frac{v^2}{2 \text{ m } 0.01 \left(\frac{\text{km}}{\text{h}} \right)^2} \\ &= \frac{50}{\text{m}} (\text{km/h})^2 \\ &= \frac{50}{3.6^2} \text{ m/s}^2 = \underline{\underline{3.86 \text{ m/s}^2}}. \end{aligned}$$

Zum Vergleich: Komfortable Verzögerungen liegen um 2 m/s^2 , während eine Vollbremsung auf trockener Straße etwa 8 m/s^2 bis 10 m/s^2 entspricht. Auf feuchter Straße werden noch etwa $4\text{-}6 \text{ m/s}^2$ erreicht. Mit der Bremswegregel liegt man also auch bei nasser Fahrbahn noch auf der sicheren Seite, nicht jedoch bei verschneiter oder vereister Fahrbahn!

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 8.2: Bremsen vor Lichtsignalanlagen

Zwei Fälle werden unterschieden:

- (i) Passieren der Ampel während der Gelbphase ist bei unveränderter Geschwindigkeit möglich. Die Bedingung dafür lautet

$$s < s_1 = v\tau_g.$$

- (ii) Passieren der Ampel während der Gelbphase ist nicht möglich. In diesem Falle wird nach der Reaktionszeit T_r mit konstanter Verzögerung b so gebremst, dass man gerade vor der roten Ampel zum Stehen kommt:

$$s = vT_r + \frac{v^2}{2b}$$

Der "Worst Case" für den Abstand s bei Gelbwerden der Ampel ist offensichtlich $s = s_1$, denn dann würde man bei der Entscheidung "Weiterfahren" die Ampel gerade beim Umschalten auf Rot passieren. Die resultierende Bremsverzögerung erhält man durch Gleichsetzen:

$$v\tau_g = vT_r + \frac{v^2}{2b}.$$

Nach Kürzen von v erhält man damit

$$b = \frac{v}{2(\tau_g - T_r)} = 3.47 \text{ m/s}^2.$$

Dies ist eine "ganz ordentliche" Verzögerung, die etwas unterhalb der Verzögerung von 3.86 m/s^2 gemäß der Bremswegregel "Tacho² durch 100", aber oberhalb der komfortablen Verzögerung von etwa 2 m/s^2 liegt. Die Fahrschulregel und die Mindestgelbzeit sind also konsistent.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 8.3: Einfaches Modell für eine Notbremsung

- (a) Modellparameter: T_r = Reaktionszeit, b_{\max} = maximal mögliche Bremsverzögerung (Verzögerung bei Notbremsung).
- (b) Bremsweg $s_B(v)$ und Anhalteweg $s_A(v)$ sind nach elementarer Integration der konstanten Verzögerung gegeben durch

$$s_B(v) = \frac{v^2}{2b}, \quad s_A(v) = vT_r + s_B(v)$$

und damit

$$\begin{aligned} v = 50 \text{ km/h: } & s_B(v) = \underline{\underline{12.1 \text{ m}}}, \quad s_A(v) = \underline{\underline{25.9 \text{ m}}}, \\ v = 70 \text{ km/h: } & s_B(v) = \underline{\underline{23.6 \text{ m}}}, \quad s_A(v) = \underline{\underline{43.1 \text{ m}}}. \end{aligned}$$

- (c) Zunächst wird aus der Situation mit $v_1 = 50 \text{ km/h}$ der anfängliche Abstand des Kindes ermittelt:

$$s(0) = s_A(v_1) = 25.95 \text{ m}.$$

Am Ende der Reaktionszeit wäre bei der Situation mit $v_2 = 70 \text{ km/h}$ das Kind nur noch

$$s(T_r) = s(0) - v_2 T_r = 6.50 \text{ m}$$

von der Kühlerhaube entfernt.

Nun bräuchte der Fahrer noch die Strecke $s_B(v_2) = 23.6 \text{ m}$ zum Bremsen, hat aber nur $s(T_r) = 6.5 \text{ m}$ zur Verfügung. Ohne Kollision würde das Fahrzeug also eine zusätzliche Strecke $\Delta s = 17.13 \text{ m}$ bis zum Stillstand benötigen. Daraus ergibt sich die Kollisionsgeschwindigkeit durch Umstellen der Bremsweggleichung zu

$$v_{\text{coll}} = \sqrt{2b\Delta s} = \underline{\underline{16.56 \text{ m/s}}} = \underline{\underline{59.6 \text{ km/h}}}$$

Falls Sie den Führerschein machen: Dies ist aus der Fragesammlung für den theoretischen Teil der Prüfung. Die "offizielle" Antwort ist 60 km/h.

Setzt man alle Zahlenwerte erst zum Schluss ein, bekommt man übrigens

$$\begin{aligned}s(T_r) &= v_1 T_r + \frac{v_1^2}{2b} - v_2 T_r, \\ \Delta s &= \frac{v_2^2}{2b} - s(T_r) = (v_2 - v_1) \left(\frac{v_1 + v_2}{2b} + T_r \right)\end{aligned}$$

und damit den allgemeinen Ausdruck

$$v_{\text{coll}} = \sqrt{2b\Delta s} = \underline{\underline{\sqrt{(v_2 - v_1)(v_2 + v_1 + 2bT_r)}}}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 8.4: Beschleunigung auf freier Strecke

Teilaufgabe (a)

Die Gleichung für die Beschleunigung auf Wunschgeschwindigkeit lautet

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{v_0 - v}{\tau}. \quad (1)$$

(Bemerkung: Dieser Term ist analog dem Anpassungsterm bei den Makromodellen 2. Ordnung.)

(a) Die Maximalbeschleunigung findet zur Zeit $t = 0$ statt (Zähler ist für $v(t) = 0$ maximal):

$$a_{\max} = \frac{v_0 - v(0)}{\tau} = \frac{v_0}{\underline{\underline{\tau}}}.$$

Mit $a_{\max} = 2 \text{ m/s}^2$ und $v_0 = 120 \text{ km/h}$ ergibt sich eine Relaxationszeit von

$$\tau = \frac{v_0 - 0}{a_{\max}} = 16.7 \text{ s.}$$

(b) Allgemeine Lösung dieser *gewöhnlichen Differenzialgleichung* (DGL) z.B. durch *Trennung bzw. Separation der Variablen*:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{v - v_0} &= -\frac{dt}{\tau} \\ \ln(v - v_0) &= -\frac{t}{\tau} + C \\ v - v_0 &= e^{-\frac{t}{\tau}} e^C =: A e^{-\frac{t}{\tau}} \\ v &= v_0 + A e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

Die Integrationskonstante A wird aus den Anfangsbedingungen bestimmt,

$$v(0) = v_0 + A = 0 \Rightarrow A = -v_0,$$

und damit lautet die Lösung der DGL

$$\underline{\underline{v(t) = v_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}}.$$

Alternative Lösungsmethode: Die Lösung der inhomogenen DGL ergibt sich aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung $v_H(t)$ und *einer* speziellen Lösung der vollen inhomogenen Gleichung, z.B. der Konstantfahrt $v_I(t) = v_0$. Die homogene Gleichung lautet

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v}{\tau}. \quad (2)$$

Mit dem Exponentialansatz erhält man die homogene Lösung proportional zu $e^{-t/\tau}$, also

$$v(t) = v_H(t) + v_I(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + v_0.$$

Aus den Anfangsbedingungen $v(0) = 0$ ergibt sich die Integrationskonstante zu $A = -v_0$ und damit wiederum die Lösung

$$v(t) = \underline{\underline{v_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}}.$$

Beschleunigungsverlauf durch Ableiten der Geschwindigkeit:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{v_0 - v}{\tau} = \frac{v_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

- (c) Die Zeit t_{100} "von 0 auf $v_{100} = 100$ km/h" ist bei bekannter Anpassungszeit $\tau = 16.67$ s und bekannter Wunschgeschwindigkeit $v_0 = 120$ km/h zu bestimmen. Die Bedingung lautet:

$$v(t_{100}) = v_{100} = v_0 \left(1 - e^{-\frac{t_{100}}{\tau}}\right). \quad (3)$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} e^{-\frac{t_{100}}{\tau}} &= 1 - \frac{v_{100}}{v_0} \\ -\frac{t_{100}}{\tau} &= \ln\left(1 - \frac{v_{100}}{v_0}\right) = \ln\left(\frac{1}{6}\right) \\ t_{100} &= -\tau \ln\left(\frac{1}{6}\right) = \tau \ln 6 = 29.9 \text{ s.} \end{aligned}$$