Verkehrsdynamik und -simulation

SS 2020, Lösungsvorschläge zu Übung Nr. 8

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 8.1: Faustregeln für Abstand und Bremsweg

(a) Zunächst mal wächst der Abstand gemäß der Regel “Abstand gleich halber Tacho” proportional zur Geschwindigkeit. Damit ist der Quotient $T = s/v$, also die gesuchte Folgezeit, unabhängig von der Geschwindigkeit! Den Zahlenwert erhält man durch einfaches Einsetzen, wobei man aber sorgfältig auf die Einheiten achten muss:

$$\begin{aligned}\text{Abstand in m} &= \frac{1}{2}(\text{Geschwindigkeit in km/h})\\ \frac{s}{\text{m}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{v}{\text{km/h}}\right),\end{aligned}$$

also

$$T = \frac{s}{v} = \frac{\frac{1}{2}\text{m}\left(\frac{v}{\text{km/h}}\right)}{v} = \frac{\frac{1}{2}\text{m}}{\text{km/h}} = \frac{0.5\,\text{h}}{1\,000} = \frac{1\,800\,\text{s}}{1\,000} = \underline{\underline{1.8\,\text{s}}}.$$

Bemerkung:

Die entsprechende USA-Regel lautet übrigens: *“For every ten miles per hour you drive faster, add a car length to your safety gap”*. Es ist nicht klar, wie lang das “car” sein soll. Wir nehmen mal einen USA-Straßenkreuzer mit $l_{\text{car}} = 5\,\text{m}$ an. Schließlich wurde diese Regel zu Zeiten billigen Öls formuliert. Also mit der üblichen Bezeichnung mph für “Miles per hour”:

$$T = \frac{s}{v} = \frac{l_{\text{car}}}{10\,\text{mph}} = \frac{5\,\text{m}}{10\,\text{mph}\ 1.6\frac{\text{km/h}}{\text{mph}}\ \frac{1\,\text{m/s}}{3.6\,\text{km/h}}} = \frac{5\,\text{m}\ 3.6\,\text{s/m}}{16} = \underline{\underline{\frac{18}{16}}}\,\text{s}.$$

Dies ist ein deutlich kürzerer Abstand. Erst bei Fahrzeuglängen von etwa 8 m würde die europäische Abstandsregel resultieren.

Insgesamt hat der Modellparameter T (Folgezeit) plausible Werte zwischen $T = 0.3\,\text{s}$ (extrem aggressiver Fahrer) und $T = 3\,\text{s}$ (“Sonntagsfahrer”).

(b) Die Faustformel “Bremsweg gleich Quadrat der Geschwindigkeit durch 100” für den Bremsweg s in Abhängigkeit der Geschwindigkeit v lautet unter Berücksichtigung der implizit (also unbewusst) vorausgesetzten Einheiten m und km/h:

$$\frac{s}{\text{m}} = 0.01\left(\frac{v}{\text{km/h}}\right)^2$$

Wir bestimmen den Bremsweg am einfachsten, indem wir den Bremsvorgang im Gedanken "rückwärts" in der Zeit ablaufen lassen, also mit einem bei $x = 0$ stehenden Fahrzeug starten, welches ab dem Zeitpunkt $t = 0$ konstant mit b *beschleunigt*. Es gilt also

$$x(0) = v(0) = 0$$

und damit als Funktion der rückwärts laufenden Zeit:

$$\begin{aligned} v(t) &= v(0) + bt = bt, \\ s(t) &= s(0) + v(0)t + \frac{1}{2}bt^2 = \frac{1}{2}bt^2. \end{aligned}$$

Durch Eleminieren der Zeit aus der ersten Gleichung, $t = v/b$, und Einsetzen in die zweite, erhält man die quadratische Abhängigkeit des Weges von v:

$$s = \frac{v^2}{2b}.$$

Lässt man diesen Vorgang "rückwärts" in der Zeit ablaufen, hat man den Bremsweg anstelle des Beschleunigungsweges. Nun Vergleich mit der Faustformel:

"Bremsweg (in m) = Quadrat der Geschwindigkeit (in km/h) durch 100":

$$\begin{aligned} b = \tfrac{v^2}{2s} &= \frac{v^2}{2\,\mathrm{m}\ 0.01 \left(\frac{v}{\mathrm{km/h}}\right)^2} \\ &= \frac{50}{\mathrm{m}}\ (\mathrm{km/h})^2 \\ &= \frac{50}{3.6^2}\ \mathrm{m/s^2} = \underline{\underline{3.86\ \mathrm{m/s^2}}}. \end{aligned}$$

Zum Vergleich: Komfortable Verzögerungen liegen um $2\,\mathrm{m/s^2}$, während eine Vollbremsung auf trockener Straße etwa $8\,\mathrm{m/s^2}$ bis $10\,\mathrm{m/s^2}$ entspricht. Auf feuchter Straße werden noch etwa 4-6 $\mathrm{m/s^2}$ erreicht. Mit der Bremswegregel liegt man also auch bei nasser Fahrbahn noch auf der sicheren Seite, nicht jedoch bei verschneiter oder vereister Fahrbahn!

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 8.2: Bremsen vor Lichtsignalanlagen

Zwei Fälle werden unterschieden:

(i) Passieren der Ampel während der Gelbphase ist bei unveränderter Geschwindigkeit möglich. Die Bedingung dafür lautet

$$s < s_1 = v\tau_g.$$

(ii) Passieren der Ampel während der Gelbphase ist nicht möglich. In diesem Falle wird nach der Reaktionszeit T_r mit konstanter Verzögerung b so gebremst, dass man gerade vor der roten Ampel zum Stehen kommt:

$$s = vT_r + \frac{v^2}{2b}$$

Der *"Worst Case"* für den Abstand s bei Gelbwerden der Ampel ist offensichtlich $s = s_1$, denn dann würde man bei der Entscheidung "Weiterfahren" die Ampel gerade beim Umschalten auf Rot passieren. Die resultierende Bremsverzögerung erhält man durch Gleichsetzen:

$$v\tau_g = vT_r + \frac{v^2}{2b}.$$

Nach Kürzen von v erhält man damit

$$b = \frac{v}{2(\tau_g - T_r)} = 3.47\,\mathrm{m/s^2}.$$

Dies ist eine "ganz ordentliche" Verzögerung, die etwas unterhalb der Verzögerung von $3.86\,\mathrm{m/s^2}$ gemäß der Bremswegregel "Tacho^2 durch 100", aber oberhalb der komfortablen Verzögerung von etwa $2\,\mathrm{m/s^2}$ liegt. Die Fahrschulregel und die Mindestgelbzeit sind also konsistent.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 8.3: Einfaches Modell für eine Notbremsung

(a) Modellparameter: T_r = Reaktionszeit, b_{max} = maximal mögliche Bremsverzögerung (Verzögerung bei Notbremsung).

(b) Bremsweg $s_B(v)$ und Anhalteweg $s_A(v)$ sind nach elementarer Integration der konstanten Verzögerung gegeben durch

$$s_B(v) = \frac{v^2}{2b}, \quad s_A(v) = vT_r + s_B(v)$$

und damit

$$v = 50\text{ km/h:} \quad s_B(v) = \underline{\underline{12.1\text{ m}}},\ s_A(v) = \underline{\underline{25.9\text{ m}}},$$
$$v = 70\text{ km/h:} \quad s_B(v) = \underline{\underline{23.6\text{ m}}},\ s_A(v) = \underline{\underline{43.1\text{ m}}}.$$

(c) Zunächst wird aus der Situation mit $v_1 = 50$ km/h der anfängliche Abstand des Kindes ermittelt:

$$s(0) = s_A(v_1) = 25.95\,\mathrm{m}.$$

Am Ende der Reaktionszeit wäre bei der Situation mit $v_2 = 70$ km/h das Kind nur noch

$$s(T_r) = s(0) - v_2 T_r = 6.50\,\mathrm{m}$$

von der Kühlerhaube entfernt.

Nun bräuchte der Fahrer noch die Strecke $s_B(v_2)$=23.6 m zum Bremsen, hat aber nur $s(T_r) = 6.5\,\mathrm{m}$ zur Verfügung. Ohne Kollision würde das Fahrzeug also eine zusätzliche Strecke $\Delta s = 17.13\,\mathrm{m}$ bis zum Stillstand benötigen. Daraus ergibt sich die Kollisionsgeschwindigkeit durch Umstellen der Bremswegsgleichung zu

$$v_{\text{coll}} = \sqrt{2b\Delta s} = \underline{\underline{16.56\text{ m/s}}} = \underline{\underline{59.6\text{ km/h}}}$$

Falls Sie den Führerschein machen: Dies ist aus der Fragesammlung für den theoretischen Teil der Prüfung. Die "offizielle" Antwort ist 60 km/h.

Setzt man alle Zahlenwerte erst zum Schluss ein, bekommt man übrigens

$$\begin{aligned} s(T_r) &= v_1 T_r + \frac{v_1^2}{2b} - v_2 T_r, \\ \Delta s &= \frac{v_2^2}{2b} - s(T_r) = (v_2 - v_1)\left(\frac{v_1 + v_2}{2b} + T_r\right) \end{aligned}$$

und damit den allgemeinen Ausdruck

$$v_{\text{coll}} = \sqrt{2b\Delta s} = \underline{\underline{\sqrt{(v_2 - v_1)(v_2 + v_1 + 2bT_r)}}}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 8.4: Beschleunigung auf freier Strecke

Teilaufgabe (a)

Die Gleichung für die Beschleunigung auf Wunschgeschwindigkeit lautet

$$\dot{v} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{v_0 - v}{\tau}. \tag{1}$$

(Bemerkung: Dieser Term ist analog dem Anpassungsterm bei den Makromodellen 2. Ordnung.)

(a) Die Maximalbeschleunigung findet zur Zeit $t = 0$ statt (Zähler ist für $v(t) = 0$ maximal):

$$a_{\max} = \frac{v_0 - v(0)}{\tau} = \underline{\underline{\frac{v_0}{\tau}}}.$$

Mit $a_{\max} = 2\,\mathrm{m/s}^2$ und $v_0 = 120\,\mathrm{km/h}$ ergibt sich eine Relaxationszeit von

$$\tau = \frac{v_0 - 0}{a_{\max}} = 16.7\,\mathrm{s}.$$

(b) Allgemeine Lösung dieser *gewöhnlichen Differenzialgleichung* (DGL) z.B. durch *Trennung bzw. Separation der Variablen*:

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{v - v_0} &= -\frac{\mathrm{d}t}{\tau} \\
\ln(v - v_0) &= -\frac{t}{\tau} + C \\
v - v_0 &= e^{-\frac{t}{\tau}} e^C =: Ae^{-\frac{t}{\tau}} \\
v &= v_0 + Ae^{-\frac{t}{\tau}}
\end{aligned}$$

Die Integrationskonstante A wird aus den Anfangsbedingungen bestimmt,

$$v(0) = v_0 + A = 0 \Rightarrow A = -v_0,$$

und damit lautet die Lösung der DGL

$$\underline{\underline{v(t) = v_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).}}$$

Alternative Lösungsmethode: Die Lösung der inhomogenen DGL ergibt sich aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung $v_H(t)$ und *einer* speziellen Lösung der vollen inhomogenen Gleichung, z.B. der Konstantfahrt $v_I(t) = v_0$. Die homogene Gleichung lautet

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{v}{\tau}. \tag{2}$$

Mit dem Exponentialansatz erhält man die homogene Lösung proportional zu $e^{-t/\tau}$, also

$$v(t) = v_H(t) + v_I(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + v_0.$$

Aus den Anfangsbedingungen $v(0) = 0$ ergibt sich die Integrationskonstante zu $A = -v_0$ und damit wiederum die Lösung

$$v(t) = \underline{\underline{v_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).}}$$

Beschleunigungsverlauf durch Ableiten der Geschwindigkeit:

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{v_0 - v}{\tau} = \frac{v_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

(c) Die Zeit t_{100} "von 0 auf $v_{100} = 100\,\mathrm{km/h}$" ist bei bekannter Anpassungszeit $\tau = 16.67\,\mathrm{s}$ und bekannter Wunschgeschwindigkeit $v_0 = 120\,\mathrm{km/h}$ zu bestimmen. Die Bedingung lautet:

$$v(t_{100}) = v_{100} = v_0 \left(1 - e^{-\frac{t_{100}}{\tau}}\right). \tag{3}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} e^{-\frac{t_{100}}{\tau}} &= 1 - \frac{v_{100}}{v_0} \\ -\frac{t_{100}}{\tau} &= \ln\left(1 - \frac{v_{100}}{v_0}\right) = \ln\left(\frac{1}{6}\right) \\ t_{100} &= -\tau \ln\left(\frac{1}{6}\right) = \tau \ln 6 = 29.9\,\mathrm{s}. \end{aligned}$$