Verkehrsdynamik und -simulation

SS 2024, Lösungsvorschläge zu Übung Nr. 7

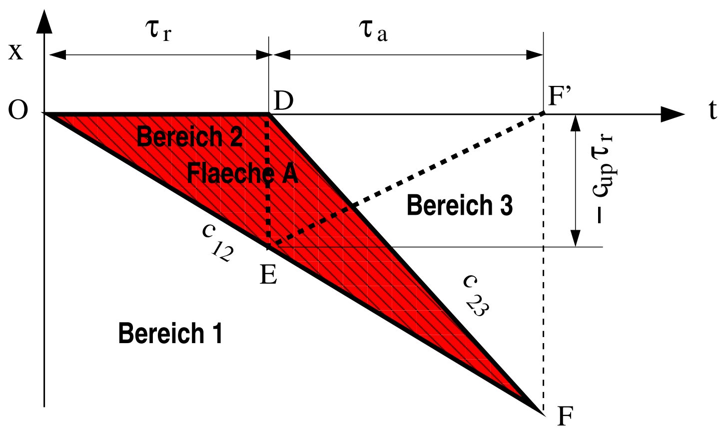
Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7.1: [Siehe engl. Lösungsvorschlag]

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7.2: Gesamt-Wartezeit hinter einer LSA

Zunächst ergibt sich die Gesamtwartezeit aller Fahrzeuge in der Ampel-Warteschlange durch die Integration der aktuellen Fahrzeugzahl über die Gesamtdauer $\tau_r+\tau_\mathrm{a}$ (Dauer τ_r der Rotphase und Auflösungszeit τ_a nach Grünwerden) der Warteschlange:

$$\tau_\mathrm{tot} = \int\limits_0^{\tau_r+\tau_\mathrm{a}} n(t)\ \mathrm{d}t = \int\limits_0^{\tau_r+\tau_\mathrm{a}} \int\limits_{x_u(t)}^{x_o(t)} \rho_\mathrm{max}\ \ \mathrm{d}x\ \ \mathrm{d}t = \rho_\mathrm{max} A,$$

also gleich der Warteschlangendichte multipliziert mit der Fläche A der Warteschlange im raumzeitlichen Diagramm gemäß folgender Abbildung:



Die Fläche A ist gleich der Summe der Flächen der beiden rechtwinkligen Dreiecke ODE und DEF' (Letzteres ergibt sich aus dem schiefwinkligen Dreieck DEF durch Ziehen des Punktes F nach F', was die Fläche nicht verändert):

$$\tau_\mathrm{tot} = \frac{1}{2}\rho_\mathrm{max}\left(-c_{12}\tau_\mathrm{r}^2 - c_{12}\tau_\mathrm{r}\tau_\mathrm{a}\right).$$

Schließlich verwenden wir noch die stromaufwärtige Ausbreitungsgeschwindigkeit c_{12} und die stromabwärtige Ausbreitungsgeschwindigkeit c_{23} (=Stauwellengeschwindigkeit), um die Auflösungszeit τ_a auf die Rotphasendauer τ_r zu beziehen (vgl. Abbildung):

$$c_{12}\tau_\mathrm{r} = (c_{23} - c_{12})\tau_\mathrm{a},$$

Setzt man das in die Beziehung für τ_{tot} ein, ergibt sich das Ergebnis

$$\tau_{\text{tot}} = \frac{1}{2}\rho_{\text{max}}\tau_{\text{r}}^2 \, \frac{c_{12}c_{23}}{c_{12}-c_{23}}.$$

Setzt man nun noch die Schockwellen-Geschwindigkeiten

$$c_{12} = \frac{Q_{\text{in}}}{Q_{\text{in}}/V_0 - \rho_{\text{max}}}, \quad c_{23} = -\frac{1}{\rho_{\text{max}}T}$$

ein, ergibt eine lange algebraishe Rechnung schließlich das Endergebnis in der Form

$$\tau_{\text{tot}} = \frac{\frac{1}{2}Q_{\text{in}}\tau_r^2}{1-\frac{Q_{\text{in}}}{Q_{\text{max}}}}, \quad Q_{\text{max}} = \left(T + \frac{1}{\rho_{\text{max}}V_0}\right)^{-1}. \tag{1}$$

Die Gesamtwartezeit

- steigt mit dem *Quadrat* der Rotphasendauer,
- ist für kleine Nachfragen proportional der Nachfrage Q_{in}
- divergiert, wenn die Nachfrage Q_{in} gegen den maximalen Fluss Q_{max} geht.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7.3: Zwei LSA hintereinander: Grüne Wellen

(a) Kapazität:

$$K = Q_{\text{max}} = \frac{1}{T\left(1+\frac{l_{\text{eff}}}{v_0 T}\right)} = \underline{\underline{0.5\,\text{s}^{-1}}} = \underline{\underline{1\,800\,\text{Fz/h}}}.$$

Verkehrsdichte in den Warteschlangen:

$$\rho_{\text{Schlange}} = \rho_{\text{max}} = \frac{1}{l_{\text{eff}}} = \underline{\underline{133\,\text{Fz/km}}}$$

Ausbreitungsgeschwindigkeit von Störungen im Stau:

$$c_{\text{cong}} = -\frac{l_{\text{eff}}}{T} = \underline{\underline{-5\,\text{m/s}}} = \underline{\underline{-18\,\text{km/h}}}$$

Diese Ausbreitungsgeschwindigkeit gilt auch für die Fortpflanzung des Übergangs Stau→ frei nach Grünwerrden der LSA.

(b) Die Annahme eines konstanten Zuflusses ist nur sinnvoll für die erste LSA bei Ortseinfahrt. Danach kommt der Verkehrsfluss schwallförmig, in Abhängigkeit der Schaltzyklen der weiter stromausfwärts gelegenen LSA.

Zur Abschätzung der umlaufgemittelten Kapazität gehen wir von vernachlässigbaren Sicherheitszeiten aus (in der Aufgabenstellung ist nirgendwo von Gelbphasen die Rede), also wird Grün angenommen, falls die LSA gerade nicht rot ist. Die gemittelte Kapazität damit z.B. aus einer Verhältnisgleichung:

$$\overline{K} = Q_{\max}\frac{70}{110} = \underline{\underline{1\,145\,\mathrm{Fz/h}}}$$

Für eine Nachfrage (Zufluss) von $1\,029\,\mathrm{Fz/h}$ ist die Kapazität also ausreichend.

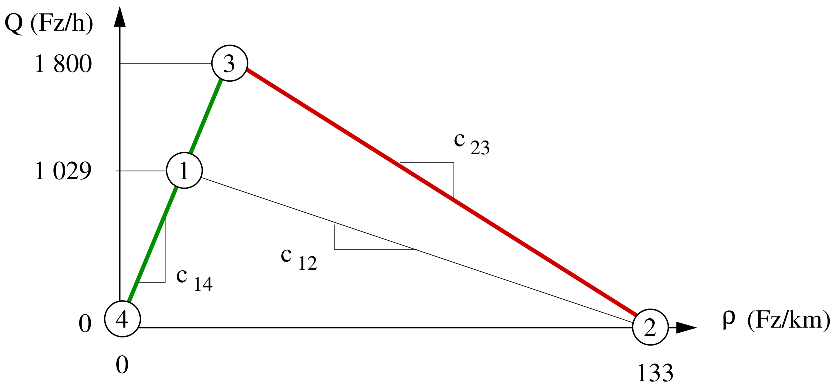
(c) Es gibt folgende Verkehrszustände (vgl. Abbildung):

(i) Zufluss: Freier Verkehr, $Q_1 = 1\,029\,\mathrm{Fz/h}$, $\rho_1 = \frac{Q_1}{V_0} = 19.0\,\mathrm{Fz/km}$

(ii) Warteschlange: $Q_2 = 0$, $\rho_2 = \rho_{\max} = 133.3\,\mathrm{Fz/km}$

(iii) Ausfluss von der Warteschlange bei grüner LSA: $Q_3 = Q_{\max} = 1\,800\,\mathrm{Fz/h}$, $\rho_3 = \frac{Q_3}{V_0} = 33.3\,\mathrm{Fz/km}$

(iv) Leere Straße "hinter" der roten LSA: $Q_4 = 0$, $\rho_4 = 0$.



Damit ergeben sich nach der "Schockwellenformel" folgende Ausbreitungsgeschwindigkeiten:

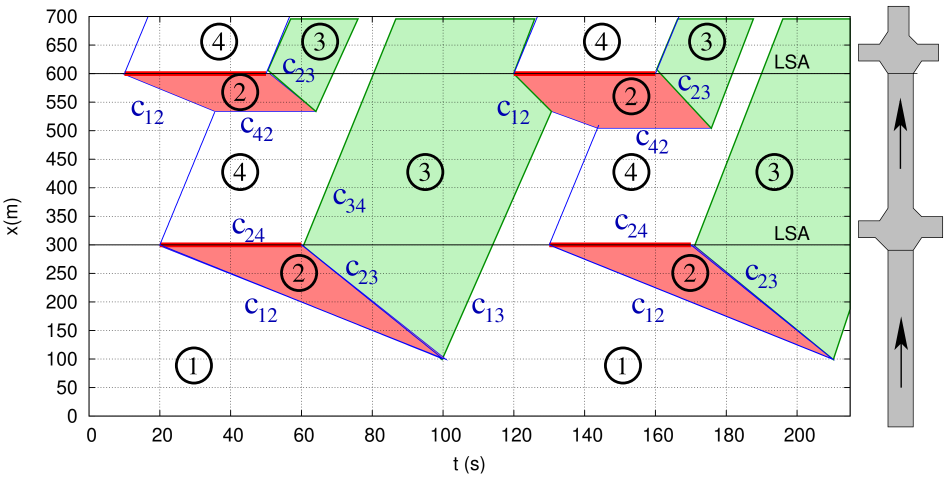
$$\begin{aligned}
c_{12} = c_{21} &= \frac{Q_2 - Q_1}{\rho_2 - \rho_1} = -2.5\,\mathrm{m/s} = -9\,\mathrm{km/h},\\
c_{13} = c_{31} = c_{14} = c_{41} = c_{34} = c_{43} &= \frac{Q_3 - Q_1}{\rho_3 - \rho_1} = 15\,\mathrm{m/s} = 54\,\mathrm{km/h},\\
c_{23} = c_{32} &= \frac{Q_2 - Q_3}{\rho_2 - \rho_3} = c_{\mathrm{cong}} = -5\,\mathrm{m/s} = -18\,\mathrm{km/h},
\end{aligned}$$

also:

- Zufluss-Warteschlange: 1 vertikale Kästchenseite pro horizontaler Kästchenseite in negativer x-Richtung
- Ausfluss aus dem Stau: 2 vertikale Kästchenseiten pro horizontaler Kästchenseite in negativer x-Richtung

– Übergänge leere Straße-Ausfluss und Ausfluss-leere Straße: 6 vertikale Kästchenseiten pro horizontaler Kästchenseite in positiver x-Richtung

(d) Skizze:



Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7.4: Stabilitätsbereiche im Payne- und im Kerner-Konhäuser-Modell

Sowohl das Payne als auch das Kerner-Konhäuser-Modell haben keinen Diffusionsterm in der Kontinuitätsgleichung, sodass das vereinfachte Stabilitätskriterium Anwendung findet (man beachte, dass im Skript das *Instabilitäts*kriterium definiert ist, bezüglich dessen das Ungleichheitszeichen umgekehrt wird):

$$\left(\rho V_{\mathrm{e}}'(\rho)\right)^2 \leq P'(\rho).$$

In beiden Fällen wird auch dasselbe Fundamentaldiagramm bzw. dieselbe Geschwindigkeits-Dichte-Relation $V_{\mathrm{e}}(\rho) = Q_{\mathrm{e}}(\rho)/\rho$ verwendet:

$$V_e(\rho) = \begin{cases} V_0 & \rho \leq \rho_{\mathrm{K}}, \\ \frac{1}{T}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{\max}}\right) & \rho > \rho_{\mathrm{K}}. \end{cases}$$

und daraus die Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}V_e}{\mathrm{d}\rho} = V_e'(\rho) = \begin{cases} 0 & \rho \leq \rho_{\mathrm{K}}, \\ -\frac{1}{\rho^2 T} & \rho > \rho_{\mathrm{K}}. \end{cases}$$

(a) Für das Payne Modell ergibt sich die Ableitung des Verkehrsdrucks als

$$P'_{\mathrm{Payne}}(\rho) = -\frac{V_{\mathrm{e}}'(\rho)}{2\tau}.$$

Damit lautet das Stabilitätskriterium (man beachte die Umdrehung des Ungleichheitszeichens, da durch $V_e' < 0$ geteilt wurde!)

$$\rho^2(V_\mathrm{e}'(\rho))^2 \le -\frac{V_\mathrm{e}'(\rho)}{2\tau}$$

Für freien Verkehr gilt $V_\mathrm{e}' = 0$ und damit neutrale bzw. marginale Stabilität (die Ungleichung ist nur als Grenzfall einer Gleichung erfüll). Für gestauten Verkehr gilt $V_\mathrm{e}' < 0$ und wir können beide Seiten durch V_e' teilen (wodurch sich allerdings die Ungleichheitsrelation umdreht!):

$$\rho^2 V_\mathrm{e}'(\rho) \ge -\frac{1}{2\tau}$$

bzw.

$$\rho^2 |V_\mathrm{e}'(\rho)| \le \frac{1}{2\tau}.$$

Fasst man beide Bereiche zusammen, gilt

$$\text{Payne-Modell kolonnenstabilil} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{marginal} & \rho < \rho_\mathrm{c} \\ \frac{1}{T} \le \frac{1}{2\tau} & \rho \ge \rho_\mathrm{c}. \end{cases}$$

mit $\rho_\mathrm{c} = 1/(V_0 T + 1/\rho_{\max})$. Umgestellt lautet für $\rho \ge \rho_\mathrm{c}$ das Kriterium $\tau < T/2$. Das Modell ist also für hinreichend kleine Anpassungszeiten stabil. Da die Folgezeit T typischerweise 0.8 s – 2.0 s beträgt, muss also τ deutlich unterhalb von 1 s liegen. Für $T = 1.1\,\mathrm{s}$ also $\tau < 0.55\,\mathrm{s}$. Die damit auftretenden effektiven Beschleunigungen von bis zu V_0/τ sind deutlich unrealistisch (siehe Aufgabe).

(b) Für das (Kühne-)Kerner-Konhäuser-Modell mit $P(\rho) = \rho\theta_0$ und $P'(\rho) = \theta_0$ spezialisiert sich das *Stabilitäts*kriterium

$$\left(\rho^2 V_\mathrm{e}'(\rho)\right)^2 \le P'(\rho)$$

zu

$$\left(\rho^2 V_\mathrm{e}'(\rho)\right)^2 \le \theta_0$$

also

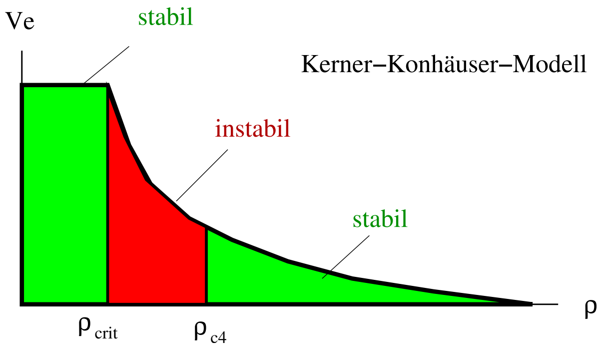
$$\text{KK-Modell kolonnenstabil} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \theta_0 \text{ (also immer)} & \rho < \rho_\mathrm{c} \\ \frac{1}{\rho^2 T^2} \le \theta_0 & \rho \ge \rho_\mathrm{c}. \end{cases}$$

bzw. (vgl. die Abbildung)

$$(\rho < \rho_\mathrm{c}) \text{ ODER } \left(\rho > \frac{1}{T\sqrt{\theta_0}}\right).$$

Daraus ergibt sich die Bedingung an die Geschwindigkeitsvarianz θ_0 für die Dichte $\rho_{\mathrm{c}4} = 50\,/\mathrm{km}$, oberhalb derer das Modell ebenfalls stabil sein soll ($T = 1.1\,\mathrm{s}$):

$$\theta_0 = \frac{1}{\rho_\mathrm{c}^2 T^2} = 331\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}.$$


Ve
stabil
Kerner–Konhäuser–Modell
instabil
stabil
ρ
ρ crit
ρ c4