Verkehrsdynamik und -simulation

SS 2020, Lösungsvorschläge zu Übung Nr. 3

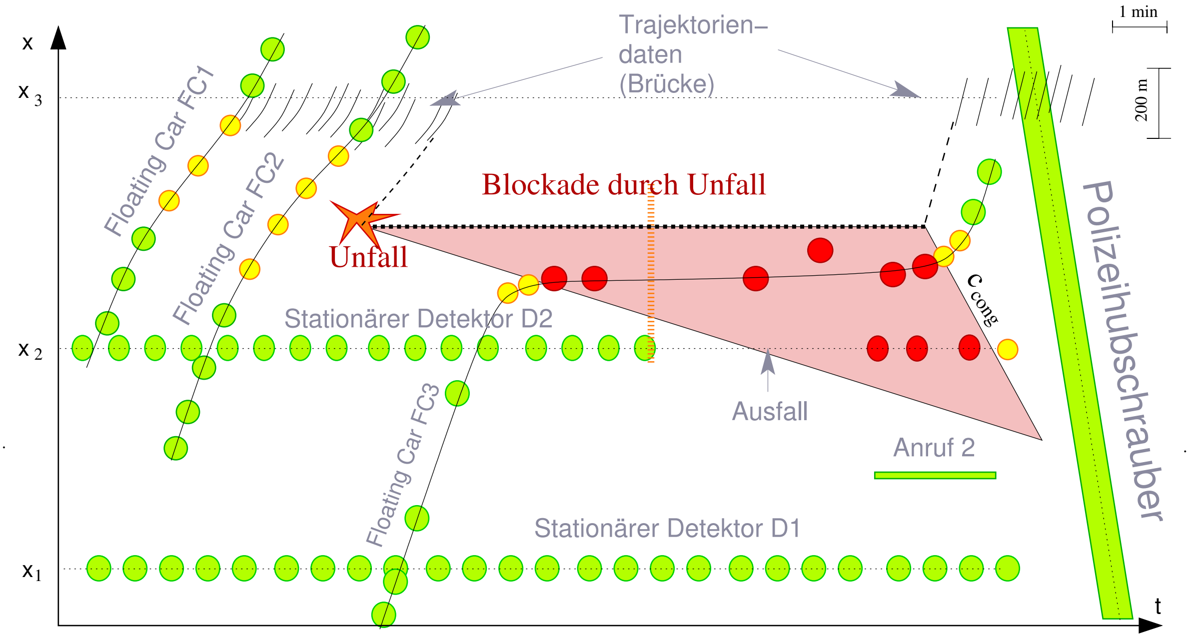
Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3.1: Lageschätzung mit heterogenen Datenquellen

(a) Entgegen de Fahrtrichtung (mit etwa 200 km/h). Er erfasst zu jedem festen Zeitpunkt einen Bereich von etwa 500 m.

(b) Die "Anrufer"-Information ist heutzutage sehr aktuell, da sie über "Crowd-Intelligence"-Anwendungen wie WAZE mehr und mehr automatisiert wird:

- Anrufer 1: Ruft kurz an, weiß nicht genau, wo er/sie ist, meldet Stau.
- Anrufer 2: Ruft lange von einer Brücke aus an, weiß genau, wo er/sie ist, meldet die ganze Anrufzeit freien Verkehr.
- Anrufer 3: Ruft kurz an, weiß genau, wo er/sie ist, meldet Stau.

(c) Vgl. die folgende Abbildung.



Aufgabe 3.2: Widersprüchliche Datenquellen

(i) Mit Gleichgewichtung, $V = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$, ergibt sich bei verschwindenden systematischen Fehlern und unabhängigen zufälligen Fehlern die Fehlervarianz

$$\sigma_V^2 = \frac{1}{4}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right) = \frac{1}{4}\left(\sigma_1^2 + 4\sigma_1^2\right) = \frac{5}{4}\sigma_1^2.$$

Der Fehler vergrößert sich also durch Hinzunahme der FCD um den Faktor $\sqrt{5/4}$.

(ii) Bei der Wichtung SDD:FCD=4:1, also

$$V_{\text{opt}} = \frac{1}{5}(4V_1 + V_2)$$

ergibt sich die Fehlervarianz

$$(\sigma_V^2)_{\text{opt}} = \frac{1}{25}\left(16\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right) = \frac{1}{25}\left(16\sigma_1^2 + 4\sigma_1^2\right) = \frac{4}{5}\sigma_1^2.$$

Der Fehler verändert sich also durch Hinzunahme der FCD um den Faktor $\sqrt{4/5}$, er *verkleinert* sich also. Man kann zeigen (siehe Vorlesung), dass die minimale Gesamtvarianz genau dann erreicht wird, wenn man die einzelnen Datenquellen proportional zur Inversen der jeweiligen Varianzen wichtet.

Hintergrund

Allgemein gilt für den Erwartungswert μ und die Varianz σ^2 einer Linearkombination $V = aV_1 + bV_2$ zweier Zufallsvariablen X_1 und X_2:

$$\mu_V = a\mu_1 + b\mu_2, \quad \sigma_V^2 = a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 + 2ab\sigma_1\sigma_2 \operatorname{Corr}(X_1, X_2).$$

Hier wird Unabhängigkeit zwischen V_1 und V_2 vorausgesetzt (was aus dem Sachverhalt auch offensichtlich ist!), woraus eine verschwindende Korrelation $\operatorname{Corr}(X_1, X_2) = 0$ folgt (aber nicht umgekehrt!). Außerdem wird bei V_1 und V_2 Unverzerrtheit vorausgesetzt, also ist $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ gleich dem wahren Mittelwert.

Um hier die Koeffizienten a und b zu bestimmen, gibt es zwei Kriterien:

- Auch die Linearkombination sollte unverzerrt sein:

$$\mu_V = (a + b)\mu \stackrel{!}{=} \mu \;\Rightarrow\; a + b = 1$$

- Die Varianz sollte minimal sein:

$$\sigma_V^2(a) = a^2\sigma_1^2 + (1 - a)^2\sigma_2^2 \stackrel{!}{=} \min_a$$

Ableiten und Nullsetzen ergibt direkt

$$\frac{a}{1-a} = \frac{a}{b} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = 4$$

(die Gewichtungen sind proportional den inversen Varianzen) bzw.

$$a = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{4}{5}, \quad b = 1 - a = \frac{1}{5}.$$