Methoden Verkehrsökonometrie für Master-Studierende

Winter semester 2021/22, Solutions to Tutorial No. 12

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 12.1: Verkehrsökonometrisches Verflechtungsmodell (Input-Output-Modell)

Allgemeines

Das Verkehrsökonometrische Verflechtungsmodell (bzw. Input-Output-Modell) stellt die Lieferströme von Gütern und Leistungen als Ströme von Branche zu Branche dar. Es geht von der Gliederung der Volkswirtschaft in n produzierende Sektoren i und einem Endverbrauchssektor aus (Vgl. Richter, Verkehrsökonometrie). Betrachtet man nur einen Teil der Verflechtung, werden alle nichtbetrachteten Sektoren zum Endverbraucher gezählt. Nimmt man

(i) Stationarität bzw. Fließgleichgewicht an (evtl. Lagerbestände werden weder aufgestockt noch abgebaut)

(ii) Linearität sn (keine Skaleneffekte durch Massenproduktion),

dann lautet das Modell

$$x_i = y_i + \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = y_i + \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j. \tag{1}$$

Hierbei bedeuten:

- x_i der Gesamtausstoß an Produkten oder Leistungen im Sektor i in mit den anderen Sektoren kommensurablen Einheiten (im Allgemeinen Geldeinheiten),
- x_{ij} die Menge an Produkten oder Dienstleistungen des Sektors i, welche für Sektor j benötigt wird,
- y_i die direkt von Sektor i an den Endverbraucher gehenden Produkte oder Leistungen,
- A_{ij} die Elemente der *Koeffizientenmatrix des direkten Aufwandes.*

Die Nachfragen y_i sind die exogenen Variablen, die Gesamtproduktionen x_i sind die endogenen Variablen und die Modellparameter sind gegeben durch A_{ij}.

Um nach den endogenen Variable $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (in einem Modell mit n Sektoren) aufzulösen, schreiben wir (1) in Vektornotation:

$$\vec{x} = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{y}. \tag{2}$$

Mit der Multiplikation der Einheitsmatrix **1** auf beiden Seiten, kann man die "Vorfaktoren" (Matrizen) der $\vec{x}$ zusammenfassen zu

$$(\mathbf{1} - \mathbf{A})\ \vec{x} = \vec{y}. \tag{3}$$

Durch das Multiplizieren der inversen Matrix $(\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}$ bekommt man schließlich

$$\vec{x} = (\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\vec{y}\,. \tag{4}$$

Die Matrix $\mathbf{B} = (\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}$ heisst auch *Matrix des vollen Aufwands* (s.u.).

Lösungsvorschläge

(a) Koeffizienten x_{ij} des Güter- und Leistungsstroms von Sektor i nach j mit $i, j = 1$ Energiesektor und $i, j = 2$ Maschinenbau:

	Energie	Maschine
Energie	50 kWh bzw. €12.50	50 kWh bzw. €12.50
Maschine	€10	€10

Diese Zahlenwerte ergeben sich wie folgt:

- Eigenbedarf Sektor 1: $x_{11} = 500$ kWh $\cdot$ 0.1 = 50 kWh; 50 kWH $\cdot$ €0.25/kWh = €12.50
- Eigenbedarf Sektor 2: $x_{22} =$ €200 $\cdot$ 0.05 = €10
- Bedarf von Sektor 1 an Produkten aus Sektor 2: $x_{21} = \frac{1750\text{ EUR}}{87600\text{ kWh}} \cdot 500\text{ kWh} =$ €10
- Bedarf von Sektor 2 an Produkten aus Sektor 1: $x_{12} = \frac{1}{4}\frac{\text{kWh}}{€} * 200€ = 50\,\text{kWh}$ bzw. €12.50

(b) Ausstoß an Strom bzw. Maschinenwert an den Endverbraucher y_i:

$$x_i = y_i + \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\,. \tag{5}$$

Der Gesamtausstoß x_i ist gegeben

- für den Sektor 1 durch $x_1 = 500\,\text{kWh}$ bzw. $x_1 =$ €125
- und den Sektor 2 durch $x_2 =$ €200.

Damit berechnet sich die Abgabe an den Endverbraucher:

- Für Energie:

  $y_1 = x_1 - x_{11} - x_{12} =$ 500 - 50 - 50 = 400 kWh bzw. €100
- Für Maschinensektor:

  $y_2 = x_2 - x_{21} - x_{22} =$ 200 - 10 - 10 = €180

(c) Koeffizienten des direkten Aufwandes a_{ij} sind gegeben durch

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \tag{6}$$

Matrix des direkten Aufwandes $\mathbf{A}$ ist daher:

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{12.50}{125} & \frac{12.50}{200} \\ \frac{10}{125} & \frac{10}{200} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1000 & 0.0625 \\ 0.0800 & 0.0500 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Die Matrix des vollen Aufwandes $\mathbf{B}$ ist definiert durch $\mathbf{B} = (\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}$ mit der Einheitsmatrix $\mathbf{1}$. Zunächst berechnen wir

$$\mathbf{1} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 - 0.1 & 0 - 0.0625 \\ 0 - 0.08 & 1 - 0.05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.0625 \\ -0.08 & 0.95 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Das Inverse einer 2×2-Matrix mit den Elementen M_{ij} ist gegeben durch

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{M}} \begin{pmatrix} M_{22} & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{11} \end{pmatrix}$$

und die Determinante der 2×2-Matrix ist

$$\det M = m_{11} m_{22} - m_{12} m_{21}, \tag{9}$$

so dass

$$\det (\mathbf{1} - \mathbf{A}) = 0.85 \tag{10}$$

ist. Damit ergibt sich die Matrix des vollen Aufwandes B zu

$$\mathbf{B} = (\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 1.118 & 0.0735 \\ 0.0941 & 1.059 \end{pmatrix} \tag{11}$$

(d) 11 % mehr Nachfrage nach Maschinen bedeutet, bei einer bisherigen Nachfrage im Bezugszeitraum von 180 €, eine Änderung des Nachfragevektors in € gemäß

$$\Delta \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.11 * 180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 19.8 \end{pmatrix}.$$

Aufgrund der Linearität des Modells gilt die Definitionsgleichung $\vec{x} = \underline{\underline{B}} \cdot \vec{y}$ auch getrennt für die Änderungen. Damit ergibt sich die Änderung des Produktionsvektors zu

$$\Delta \vec{x} = \begin{pmatrix} 1.118 & 0.0735 \\ 0.0941 & 1.059 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 19.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.46 \\ 20.96 \end{pmatrix}.$$

Für 19.80 Euro mehr Ausstoß an Maschinen an den Endverbraucher/sonstige Sektoren müssen aufgrund der wechselseitigen Beziehungen für 20.96 € mehr Maschinen sowie zusätzlich für 1.46 € mehr Energie produziert werden.

Dies ergibt (vgl. Teil (c))

- einen Zuwachs von $\Delta x_1/x_1$=1.46/125=1.17 % an Energieausstoß,
- und einen Umsatzzuwachs von $\Delta x_2/x_2$=20.96/200=10.48 % im Maschinenbausektor.

Obwohl die externe Nachfrage nach Energie *nicht* steigt, erhöht sich die insgesamt angeforderte Energiemenge aufgrund der Verkettungseffekte um mehr als 1 %. Die externe Nachfrage nach Maschinen wirkt sich hingegen etwas unterproportional auf den Gesamtumsatz aus, da die Verkettungseffekte der Maschinene-Nachfrage nur gering steigen (ebenfalls in der Größenordnung des Energiezuwachses von 1 %) und die Energieproduktion ja *beide* Nachfragesegmente enthält.