Methoden Verkehrsökonometrie für Master-Studierende

Winter semester 2021/22, Solutions to Tutorial No. 11

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 11.1: Kombinierte Ziel- und Verkehrsmittelwahl: Nested-Logit Modell

(a) Es sind 10 Personen, die je zwischen 3 und 5 Einkäufe getätigt haben. Insgesamt also

$$N = \sum_{n=1}^{10} (y_{n11} + y_{n12} + y_{n21} + y_{n22}) = 44$$

(kombinierte) Entscheidungen. Die letzte Person hat 0+1+1+3=5 Entscheidungen durchgeführt.

(b) Der Füllstand F des Kühlschranks entscheidet darüber, ob viel oder wenig eingekauft wird, also primär die Ladentypwahl. Also ist F eine exogene Variable der Top-Level-Entscheidung. Die Zeiten T_{lm} hingegen beeinflussen sowohl die Ladentyp- als auch die Verkehrsmittelwahl und müssen deshalb als exogene Variable in die untere Ebene, also in die Nutzenfunktionen der Nester "Tante Emma" und "Discounter" (Über die später berechnete Inklusionsvariable haben sie dann auch Einfluss auf die Top-Level-Entscheidung). Jedes Nest enthält als Alternativen die zwei relevanten Verkehrsmodi.

(c)
- Parameter β_1, β_3: Zeitsensitivitäten beider Modi bei der Fahrt zur Tante Emma bzw zum Discounter. Beide sollten negativ sein. Innerhalb jedes Nests werden die Fahrtzeiten generisch modelliert, die Zeitsensitivitäten von ÖV und MIV sind also gleich (aber die gemeinsame Sensitivität ist i.A. unterschiedlich für Tante Emma und den Discounter).
- Parameter β_2: AC, Attraktivitätsvorteil für den ÖV gegenüber dem MIV als Referenzalternative beim Einkauf bei Tante Emma. Da dort nicht so viel eingekauft wird, muss man nicht viel schleppen und der ÖV ist bei gleichen Zeiten meist attraktiver, also wird $\beta_2 > 0$ erwartet.
- Parameter β_4: AC, Attraktivitätsvorteil für den ÖV gegenüber dem MIV als Referenzalternative beim Einkauf beim Discounter. Da man beim Discounter eher viel einkauft, ist ein Auto praktischer und β_4 wird deshalb negativ erwartet.

(d) Für die Person $n = 10$ gilt für die skalierten deterministischen Nutzenfunktionen innerhalb der Nests:

$$\frac{\tilde{V}_{10,1,1}}{\lambda_1} = 25\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 = -3.73,$$
$$\frac{\tilde{V}_{10,1,2}}{\lambda_1} = 10\hat{\beta}_1 = -1.84,$$
$$\frac{\tilde{V}_{10,2,1}}{\lambda_2} = 25\hat{\beta}_3 + \hat{\beta}_4 = -7.66,$$
$$\frac{\tilde{V}_{10,2,2}}{\lambda_2} = 20\hat{\beta}_3 = -5.79.$$

Bedingte Auswahlwahrscheinlichkeiten

$$P_{nm|l} = \frac{e^{\tilde{V}_{nlm}/\lambda_l}}{N_{nl}}, \quad N_{nl} = e^{\tilde{V}_{nl1}/\lambda_l} + e^{\tilde{V}_{nl2}/\lambda_l}$$

also

$$P_{10,1|1} = \frac{e^{-3.73}}{e^{-3.73} + e{-1.84}} = 0.132,$$
$$P_{10,2|1} = \frac{e^{-1.84}}{e^{-3.73} + e{-1.84}} = 0.868,$$
$$P_{10,1|2} = \frac{e^{-7.66}}{e^{-7.66} + e{-5.79}} = 0.134,$$
$$P_{10,2|2} = \frac{e^{-5.79}}{e^{-7.66} + e{-5.79}} = 0.866$$

Realisierte relative bedingte Häufigkeiten:

$$f_{10,1|1} = 0, \quad f_{10,2|1} = 1, \quad f_{10,1|2} = 1/4, \quad f_{10,2|2} = 3/4.$$

(e) Die Inklusionswerte für Person n sind gleich den Logarithmen der Nenner der bedingten Auswahlwahrscheinlichkeiten von oben:

$$I_{nl} = \ln\left(e^{\tilde{V}_{nl1}/\lambda_l} + e^{\tilde{V}_{nl2}/\lambda_l}\right) = \ln N_{nl}$$

Damit für Person 10:

$$I_{10,1} = -1.70, \quad I_{10,2} = -5.65,$$

Die Inklusionswerte I_l stellen den skalierten Nutzen des Nests l *von außen gesehen* dar und $\lambda_l I_l$ den Nest-Nutzen in den außen verwendeten Nutzeneinheiten. Da der *Homo Oeconomicus* im Nest immer die Alternative mit dem besten Gesamtnutzen (determinstischer und Zufallsnutzen) wählt und I_l Teil des deterministischen Nutzens sein soll, kann I_l auch als *Erwartungswert* des Gesamtnutzens der jeweils besten Alternative interpretiert werden. Damit ist I_l immer größer als der maximale (skalierte) deterministische Nutzen im Nest: Durch den Zufallsnutzen kann auch eine anderen Alternative zum Zuge kommen, wodurch sich der Erwartungswert vergrößert. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn der zweitgrößte deterministische Nutzen kaum kleiner ist. Bei einem trivialen Nest mit nur einer Alternative ist der Inklusionswert gleich dem (skalierten) deterministischen Nutzen.

(f)
- Parameter β_5: Attraktivitätsverschiebung hin zu "Tante Emma" (weg vom Discounter) bei steigendem Kühlschrankinhalt. Speziell gibt β_5 die Attraktivitätsverschiebung hin zu Tante Emma bei vollem Kühlschrank im Vergleich zum leeren Kühlschrank in Top-Level Nutzeneinheiten an. $\beta_5 > 0$ erwartet, da bei steigendem Kühlschrankinhalt der Discounter unattraktiver im Vergleich zu einem kleinen Laden wird
- Parameter β_6: Attraktivitätsunterschied "Tante Emma" vs. Discounter bei gleichen Fahrzeiten (genauer: Fahrtzeiten von null) und leerem Kühlschrank, $F =: \beta_6 < 0$ erwartet, da bei leerem Kühlschrank der Discounter attraktiver ist.[1]
- λ_1, λ_2: Die Korrelationsparameter liegen im erlaubten Bereich [0,1] (Abweichungen im Rahmen des Schätzfehlers wären aber harmlos). Da sie näher an 1 wie an 0 liegen, spielt der Zufallsnutzen innerhalb der Nester eine vergleichsweise kleine Rolle (Verhältnis $\lambda/(1-\lambda)$) und der Gesamt-Zufallsnutzen ist wegen des gemeinsamen Top-Level-Anteils vergleichsweise stark korreliert (Korrelationen $1-\lambda_l^2 > 0.9$)

Die beiden Korrelationsparameter können auch zu einem Generischen zusammengefasst werden. Der Top-Level Nutzenanteil beträgt dann

$$W_l = \beta_5 F \delta_{l1} + \beta_6 \delta_{l1} + \lambda I_l$$

(g) Die Ladenauswahl auf der oberen Entscheidungsebene wird wieder mit einem normalen binomialen Logitmodell behandelt:

$$P_{nl} = \frac{e^{W_{nl}+\lambda_l I_{nl}}}{e^{W_{n1}+\lambda_1 I_{n1}} + e^{W_{n2}+\lambda_2 I_{n2}}}$$

Für Person $n = 10$ mit äußeren Nutzen $W_{10,l}$ gilt

$$W_{10,1} = \hat{\beta}_5 F_{10} + \hat{\beta}_6 + \hat{\lambda}_1 I_1 = \hat{\beta}_6 + \hat{\lambda}_1 I_1 = -2.31, \quad W_{10,2} = \hat{\lambda}_2 I_2 = -1.20$$

und damit die übergeornteten Auswahlwahrscheinlichkeiten

$$P_{10,1} = \frac{e^{W_{10,1}}}{e^{W_{10,1}} + e^{W_{10,2}}} = 0.248, \quad P_{10,2} = \frac{e^{W_{10,2}}}{e^{W_{10,1}} + e^{W_{10,2}}} = 0.752$$

Die entsprechenden relativen Häufigkeiten sind $f_1 = 1/5$ und $f_2 = 4/5$. Die kombinierten Wahrscheinlichkeiten dafür, in Ladentyp l mit Verkehrsmodus m einzukaufen, sind schließlich für Person $n = 10$

$$P_{10,1}P_{10,1|1} = 0.033, \quad P_{10,1}P_{10,2|1} = 0.216, \quad P_{10,2}P_{10,1|2} = 0.101, \quad P_{10,2}P_{10,2|2} = 0.651,$$

und die entsprechenden relativen Häufigkeiten 0/5, 1/5, 1/5 und 3/5.

[1] Dies gilt nicht, wenn man ein Klientel befragt, welches immer lieber bei "Tante Emma" einkauft.

(h) Die Äquivalenz des angegebenen Modells und des NL-Modells für $\lambda_l = 1$ (und damit die Äquivalenz der Parameterbedeutungen) sieht man dadurch, dass für $\lambda_l = 1$ das NL-Modell in ein MNL für die Nutzenfunktion

$$V_i = W_l + \tilde{V}_{lm}$$

übergeht. Mit der Entsprechung $i = 1, ..., 4$ zu den Kombinationen $(l, m) = (1,1), (1,2), (2,1)$ und $(2,2)$ muss man den Faktor von β_1 auf das Nest 1, also die Alternativen $i = 1$ und 2 beschränken, also Multiplikation mit $(\delta_{i1} + \delta_{i2})$, entsprechendes gilt für den Faktor hinter β_3, welcher durch $(\delta_{i3} + \delta_{i4})$ auf das Nest 2 beschränkt werden. Die AC hinter β_2 selektiert die Alternative $m = 1$ des Nests $l = 1$, also δ_{i1}, während die AC hinter β_4 die Alternative $i = 3$ selektiert. Für die Toplevel-Nutzenfunktion W_l wird der Selektor δ_{l1} auf $(\delta_{i1} + \delta_{i2})$ abgebildet, während die Inklusionswerte entfallen (diese ergeben gerade für $\lambda_l = 1$ die MNL-Wahrshceinlichkeit, siehe Skript)

Schwäche des MNL: Es berücksichtigt nicht, dass bei der Ladenwahl Zufallsnutzen im Spiel sind (z.B. die unbeobachtbare individuelle Vorliebe für Tante Emma oder Discounter), welche gleichermaßen für die Anfahrt mit dem ÖV und den MIV gelten, so dass die gesamten Zufallsnutzen der Ladentyp-Verkehrsmittel-Entscheidung innerhalb eines Ladentyps=Nests korreliert sind.

(i) Die Top-Level Entscheidung wird um eine Alternative $l = 3$: "nicht einkaufen" (triviales Nest ohne Unter-Entscheidungen und damit auch ohne eigenes λ) erweitert. Zum Top-Level Nutzen kommt ein füllstandsabhängiger Faktor und eine AC hinzu:

$$W_l = \beta_5 F \delta_{l1} + \beta_6 \delta_{l1} + \lambda_1 I_l \delta_{l1} + \lambda_2 I_l \delta_{l2} + \beta_7 F \delta_{l3} + \beta_8 \delta_{l3}$$

In dieser Formulierungsalternative bleibt nach wie vor der Discounter die Referenzalternative und β_5 und β_6 ändern ihre Bedeutung nicht. β_7 sollte noch positiver als β_5 sein, da bei steigenden Kühlschrankfüllstand eine Verschiebung Discounter $\rightarrow$ Nichtkauf (positives β_7) stattfindet und diese Verschiebung stärker sein sollte als die Verschiebung Discounter $\rightarrow$ Tante Emma, was $\beta_7 > \beta_5 > 0$ impliziert. Schließlich gibt β_8 den Attraktivitätsunterschied Nichtkauf-Discounter bei leerem Kühlschrank an, β_8 hängt aber auch von der allgemeinen Einkaufsfrequenz ab, so dass dieser Parameter dennoch nicht unbedingt negativ sein muss.