Methoden Verkehrsökonometrie für Master-Studierende

Winter semester 2021/22, Solutions to Tutorial No. 7

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7.1: Entscheidung Fuß, Rad oder ÖV mit trinomialen Logit- und i.i.d. Probitmodellen

(a) Die Referenz ist Alternative 3, da diese keine AC hat.

(b) Wieviel Zeitänderung bewirkt eine Änderung des deterministischen Nutzens um eine NE, also um 1?

$$|\beta_3|\Delta T \stackrel{!}{=} 1 \;\Rightarrow\; \Delta T = \frac{1}{|\beta_3|} = 10\,\text{Minuten}.$$

Entsprechende Geldänderung für eine NE Differenz:

$$|\beta_4|\Delta K \stackrel{!}{=} 1 \;\Rightarrow\; \Delta K = \frac{1}{|\beta_4|} = 1\,\text{Euro}.$$

Damit beträgt der implizite Zeitwert einen Euro pro 10 Minuten, also 6 Euro/h.

(c) Zu den angegebenen Parametern ergeben sich für die betrachtete Person die deterministischen Nutzenfunktionen (in Einheiten der Standardabweichung σ_ϵ des Zufallsnutzens):

$$\begin{aligned} V_1 &= \beta_1 + \beta_3 T_1 = -1 - 4 = -5, \\ V_2 &= \beta_2 + \beta_3 T_2 = -2 - 1.5 = -3.5, \\ V_3 &= \beta_3 T_3 + \beta_4 K_3 = -1.5 - 2 = -3.5 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich der Nenner zu

$$N = \sum_{i=1}^{3} e^{V_i} = 0.0671$$

und damit

$$P_1 = \frac{e^{V_1}}{N} = 0.100, \quad P_2 = \frac{e^{V_2}}{N} = 0.450, \quad P_3 = \frac{e^{V_3}}{N} = 0.450.$$

(d) Beim Logitmodell entspricht eine Standardabweichung des Zufallsnutzens $pi/\sqrt{6} > 1$ Nutzeneinheiten (NE), beim Probitmodell mit i.i.d. standardnormalverteilten Nutzen hingegen 1 NE. Infolgedessen muss man die Zahlenwerte der Probitnutzen gegenüber denen des Logitmodells um den Faktor $\sqrt{6}/pi < 1$ reduzieren:

$$V_1^{\text{P}} = \frac{\sqrt{6}}{\pi} V_1^{\text{L}} = -3.90, \quad V_2^{\text{P}} = \frac{\sqrt{6}}{\pi} V_2^{\text{L}} = -2.73, \quad V_3^{\text{P}} = \frac{\sqrt{6}}{\pi} V_3^{\text{L}} = -2.73$$

Daraus $V_1 - V_3 = 1.16$ und $V_2 - V_3 = 0$ und aus dem Contourplot:

$$P_1 = 0.09, \quad P_2 = 0.455, \quad P_3 = 0.455.$$

(e) Durch das Hochrechnen der Probit-Skalierung von deterministischen *und* Zufallsnutzen auf die Zufallsnutzen-Standardabweichung $\pi/\sqrt{6}$ des Logitmodells hätte man bei gleicher Form der Zufallsnuztenverteilungen exakt gleiche vorausgesagte Wahrscheinlichkeiten. Da die Gumbelverteilung ähnlich wie eine Normalverteilung aussieht, sind geringe Unterschiede zu erwarten, wie auch beobachtet wird. Dennoch machen die Modelle bisweilen auch deutlich unterschiedliche Aussagen, wie in der nächsten Teilaufgabe gezeigt.

(f) **Logitmodell**: Keine Änderung:

$$\frac{P_1}{P_2} = e^{V_1 - V_2} = 0.223$$

Dies sieht man schon am analytischen Ausdruck, der V_3 gar nicht enthält.

Beim **i.i.d. Probitmodell** muss man alles neu durchrechnen. Es gelten unveränderte Nutzenfunktionen V_1^{P} und $V_2^{\mathrm{P}} = -2.73$ für die Alternativen 1 bzw. 2, während die Nutzenfunktion des ÖV nun um $\Delta V_3^{\mathrm{P}} = -2\beta_4\pi/\sqrt{6} = 2\pi/\sqrt{6} = 1.56$ erhöht ist. Also nun $\tilde{V}_3^{\mathrm{P}} = V_3^{\mathrm{P}} + \Delta V_3^{\mathrm{P}} = -1.17$. (Eine Tilde gibt im Folgenden immer die neue Situation an.) Damit nun

$$V1 - \tilde{V}_3 = -2.73, \quad V2 - \tilde{V}_3 = -1.56$$

und aus der Höhenlinien-Grafik für P_1 (liegt auf der ersten Höhenlinie; diese haben Abstände von 0.02 voneinander) sowie für P_2 (Höhenlinienplot für P_1 mit vertauschten Argumenten):

$$\tilde{P}_1^{\mathrm{P}} = 0.02, \quad \tilde{P}_2^{\mathrm{P}} = 0.14,$$

also

$$\frac{\tilde{P}_1}{\tilde{P}_2} = 0.14 \text{ (genauer: 0.132)}.$$

Im Vergleich zu vorher, $\frac{P_1}{P_2} = 0.194$, gibt es also eine signifikante Änderung im Quotienten auf etwa 2/3 des Ausgangswertes: Das Probit-Modell hat nicht die IIA-Eigenschaft, selbst bei i.i.d. Zufallsnutzen!

Schlussfolgerung: Unabhängigkeit der Zufallsnutzen impliziert *nicht* die Unabhängigkeit von Änderungen einer dritten Alternative (IIA):

$$\epsilon \sim \text{i.i.d} \;\not\Rightarrow\; \text{IIA}$$

Hingegen gilt andersherum: Schreibt man die IIA-Eigenschaft vor, ergibt sich hieraus zwingend das Logitmodell. Man kann das Logitmodell (und daraus die IIA-Eigenschaft) nicht nur aus gumbelverteilten Zufallsnutzen herleiten, sondern umgekehrt auch das Logitmodell aus der IIA-Eigenschaft!

$$\text{IIA} \Longleftrightarrow \text{MNL}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7.2: Revealed choice: Vorlesungsumfrage

(a) Sie ist quasilinear, da sie linear in den Parametern β_j, aber nichtlinear in den die Kriterien definierenden unabhängigen Variablen: Bereits der Selektor $\delta_{ii'}$ allein wäre nichtlinear, erst recht eine unabhängige Variable wie die Weglänge, multipliziert mit einem Selektor.

(b) Diese, auch *alternativenspezifischen Konstanten* genannten Terme drücken eine globale Bevorzugung für die jeweilige Alternative uber die gesamte Personengruppe aus. Was hätte eine zusätzliche alternativenspezifische Konstante $\beta_7\delta_{i7}$ für einen Effekt? Dazu muss man sich klarmachen, dass alle Entscheidungen nur von den *Differenzen* der deterministischen Nutzen abhängen. Ziehen wir also nach Hinzufügen des Terms $\beta_7\delta_{i4}$ von den Nutzen *aller* Alternativen jeweils den Betrag δ_{i4} ab, sehen wir, dass das Potential mit den Termen

$$\beta_4\delta_{i1} + \beta_5\delta_{i2} + \beta_6\delta_{i3} + \beta_7\delta_{i4}$$

zu identischen Entscheidungswahrscheinlichkeiten führt wie das Potential

$$(\beta_4 - \beta_7)\delta_{i1} + (\beta_5 - \beta_7)\delta_{i2} + (\beta_6 - \beta_7)\delta_{i3}.$$

Außer einer Reskalierung der anderen Parameter bewirkt ein Term proportional zu δ_{i4} also nichts, so dass er überflüssig ist! Dasselbe gilt übrigens auch für einen möglichen Term proportional zu $r_i\delta_{i4}$.

(c) Riesige "virtuelle Strafkosten" (engl.: *penalties*) für den Fall, dass ein "radloser" Proband die Alternative "Rad" wählt. Im Logit-Modell führt das zu einer Auwahlwahrscheinlichkeit, bei der im Zähler e^{-10^6} steht und im Nenner neben e^{-10^6} auch "normale" Terme der Größenordnung 1. Die Wahrscheinlichkeit ist also *de facto* gleich Null.[1]

(d) Zunächst muss man berücksichtigen, dass nur Nutzen*differenzen* relevant sind. Wir bilden also die drei Differenzen mit Alternative 4, jeweils gemäß dem ursprünglichen Modell (mit Radverfügbarkeit) und dem komplexen Reisezeitansatz dieses Aufgabenteils, wobei die "Rüstzeit" $T_1^{(0)} = 0$ gesetzt wird (ein Fußgänger kann einfach loslaufen und muss kein Verkehrsmittel, außer Schusters Rappen, zuvor holen):

$$\begin{aligned}
V_{n1} - V_{n4} &= \beta_1 r_n + \beta_4 &&= -r_n\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_4}\right) + T_4^{(0)},\\
V_{n2} - V_{n4} &= \beta_2 r_n + \beta_5 &&= -r_n\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_4}\right) - \left(T_2^{(0)} - T_4^{(0)}\right),\\
V_{n3} - V_{n4} &= \beta_3 r_n + \beta_6 &&= -r_n\left(\frac{1}{v_3} - \frac{1}{v_4}\right) - \left(T_3^{(0)} - T_4^{(0)}\right),
\end{aligned}$$

Da das zweite Gleichheitszeichen für alle Personen n gelten muss, erhält man pro Zeile zwei Bedingungen, eine für die Vorfaktoren von r_n und eine für die weglängenunabhängigen

[1] Selbst wenn sich jedes Atom im Universum (alle ohne Rad!) jede Millisekunde obiger Alternativenwahl stellt, dann gäbe es von der Zeit vom Urknall bis jetzt nur dann "Rad-Entscheidungen", wenn die Wahrscheinlichekit dafür größer als etwa e^{-300} ist.

Summanden:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \left(\frac{1}{v_4} - \frac{1}{v_1}\right), \qquad \beta_4 = T_4^{(0)}, \\
\beta_2 &= \left(\frac{1}{v_4} - \frac{1}{v_2}\right), \quad \beta_5 = T_4^{(0)} - T_2^{(0)}, \\
\beta_3 &= \left(\frac{1}{v_4} - \frac{1}{v_3}\right), \quad \beta_6 = T_4^{(0)} - T_3^{(0)}.
\end{aligned}$$

Die Rüstzeitdifferenzen lassen sich also den Parametern β_4 bis β_6 der ACs zuordnen, und die Differenzen der inversen impliziten Reisegeschwindigkeiten den Entfernungssensitivitäten β_1 bis β_3.