Methoden Verkehrsökonometrie für Master-Studierende

Winter semester 2021/22, Solutions to Tutorial No. 6

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6.1: Analyse heteroskedastischer Daten: Gierrate

(a) Nimmt man als Einheit ein Winkelgrad, ergeben sich die Varianzen der Messgrößen X_1, X_2 und X_3 aus den Standardabweichungen:

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 4, \quad \sigma_3^2 = 16. \tag{1}$$

Wie groß ist die Standardabweichung des arithmetischen Mittels? Berechnung unter Ausnutzung der Unabhängigkeit über die Varianz:

$$\bar{X} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} X_i, \quad V(\bar{X}) = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{3} X_i^2 = \frac{24}{9} = \underline{\underline{\frac{8}{3}}} \;\Rightarrow\; \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{V(\bar{X})} = \underline{\underline{1.63}}. \tag{2}$$

Dabei wurden die Rechenregel $V(aX) = a^2 V(X)$ und die für unabhängige X_i gültige Rechenregel $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2)$ angewandt.

(b) Hier gilt es, die Varianz eines gewichteten Mittels $w_1X_1 + w_2X_2 + w_3X_3$ der Sensordaten zu berechnen. Mit $w_1 + w_2 + w_3 = 1$ und $w_1 = w_2$ (Bedingungen aus der Aufgabenstellung) kann man mit $w_1 = w_2 = w$ und $w_3 = 1 - 2w$ schreiben

$$\bar{X}(w) = w(X_1 + X_2) + (1 - 2w)X_3. \tag{3}$$

Offensichtlich gilt für beliebige $w \in [0, 1]$, dass der Schätzer $\bar{X}(w)$ erwartungstreu bezüglich des wahren Winkels $E(X) = 30$ ist (nicht verlangt). Die Varianz verechnet sich wieder mit den Rechenregeln für unabhängige Zufallsgrößen aus der Formelsammlung:

$$V(\bar{X}(w)) = w^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + (1 - 2w)^2\sigma_3^2 = \underline{\underline{8w^2 + 16(1 - 2w)^2}}. \tag{4}$$

Nun Minimieren bezüglich w durch Ableiten und Nullsetzen:

$$V'(w) = 16w - 64(1 - 2w) \stackrel{!}{=} 0 \;\Rightarrow\; w_{\text{opt}} = \frac{4}{9}. \tag{5}$$

Damit

$$(w_1)_{\text{opt}} = (w_2)_{\text{opt}} = \underline{\underline{\frac{4}{9}}}, \quad (w_3)_{\text{opt}} = \underline{\underline{\frac{1}{9}}}. \tag{6}$$

Also werden die beiden “besseren” Messergebnisse X_1 und X_2 vierfach bezüglich der “schlechteren” Messung 3 gewichtet.

Der Wert der Varianz beim effektiven (varianzminimalen) Schätzer $\bar{X}(w_{\text{opt}})$ ist gegeben durch

$$V(w_{\text{opt}}) = \frac{16}{81} * 8 + \frac{1}{81} * 16 = \frac{16}{9} \tag{7}$$

und damit

$$\sigma(w_{\text{opt}}) = \underline{\underline{\frac{4}{3} = 1.333.}} \tag{8}$$

Die Standardabweichung reduziert sich also bei optimaler Gewichtung der drei Messergebnisse von 1.63 auf 1.33 Winkelgrade.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6.2: Vorlesungsbefragung

(a) Reisezeiten T_i für Alternative i sind in der Regel Zeitverluste. Für "normale" Menschen stellen sie damit ebenso wie die Kosten K_i negative Nutzen dar. Bei der Alternativenbewertung kommt es nur auf Nutzen*differenzen* an. Eine zusätzliche Angabe einer alternativenspezifischen Konstante für die Alternative 2 würde das Problem also überspezifizieren (und zu Fehlermeldungen in entsprechender Statistik-Software führen).

(b) Realisierte z-Werte:

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{|\hat{\beta}_1|}{\sigma_1} = -1.90/0.46 = -4.13, \\
z_2 &= \frac{|\hat{\beta}_2|}{\sigma_2} = -0.229/0.041 = -5.59, \\
z_3 &= \frac{|\hat{\beta}_3|}{\sigma_3} = -3.67/0.71 = -5.17.
\end{aligned}$$

Damit haben alle z-Werte einen Betrag größer als 1.96 und sie sind signifikant von null verschieden, also relevant. (Die p-Werte bei Annahme einer Normalverteilung sind kleiner als 10^{-4}, also sind alle Parameter sogar hochsignifikant.)

(c) Die Auswahlwahrscheinlichkeiten des binomialen Probitmodells bei iid standardnormalverteilten Zufallsnutzen sind gegeben durch

$$P_1 = \Phi\left(\frac{V_1 - V_2}{\sqrt{2}}\right), \quad P_2 = 1 - P_1.$$

Der deterministische Nutzen der Alternative 1 ist in allen drei Situationen gegeben durch

$$V_1 = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \, 30 \,\text{min} = -8.77$$

Die Nutzen der Alternative 2 sind bei den drei Situationen unterschiedlich.

Situation 1:

$$V_1 = -8.77, \quad V_2 = -6.87, \quad \frac{V_1 - V_2}{\sqrt{2}} = -1.34, \quad P_1 = 0.089$$

Situation 2:

$$V_1 = -8.77, \quad V_2 = -9.16, \quad \frac{V_1 - V_2}{\sqrt{2}} = 0.27, \quad P_1 = 0.609$$

Situation 3:

$$V_1 = -8.77, \quad V_2 = -11.45, \quad \frac{V_1 - V_2}{\sqrt{2}} = 1.90, \quad P_1 = 0.971$$

(d) Die Auswahlwahrscheinlichkeiten des binomialen Logitmodells Probitmodells sind gegeben durch

$$P_1 = \frac{e^{V_1}}{e^{V_1} + e^{V_2}} = \frac{1}{1 + e^{-(V_1 - V_2)}}, \quad P_2 = 1 - P_1.$$

Mit den Logitparametern ist der Nutzen der Alternative 1 gegeben durch

$$V_1 = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2\, 30\,\mathrm{min} = -10.9$$

Die Nutzen der Alternative 2 sind wieder unterschiedlich.

Situation 1:

$$V_1 = -10.9, \quad V_2 = -8.5, \quad P_1 = 0.082$$

Situation 2:

$$V_1 = -10.9, \quad V_2 = -11.3, \quad P_1 = 0.601$$

Situation 3:

$$V_1 = -10.9, \quad V_2 = -14.2, \quad P_1 = 0.962$$

(e) Multiplikation der geschätzten Probit-Parameter $\hat{\beta}_j^{\mathrm{P}}$ mit $\pi/\sqrt{6}$ ergibt nahezu die gechätzten Logit-Parameter $\hat{\beta}_j^{\mathrm{L}}$:

$$\frac{\pi}{\sqrt{6}}\hat{\beta}_1^{\mathrm{P}} = -2.44, \quad \frac{\pi}{\sqrt{6}}\hat{\beta}_2^{\mathrm{P}} = -0.294, \quad \frac{\pi}{\sqrt{6}}\hat{\beta}_3^{\mathrm{P}} = -4.71$$

im Vergleich zu

$$\hat{\beta}_1^{\mathrm{L}} = -2.42, \quad \hat{\beta}_2^{\mathrm{L}} = -0.283, \quad \hat{\beta}_3^{\mathrm{L}} = -4.59.$$

Die Ähnlichkeit kommt daher, dass die Gumbelverteilung die Standardabweichung $\pi/\sqrt{6}$ hat, also $\pi/\sqrt{6}$ mal größer als die der Standardnormalverteilung des Probitmodells ist. Nach den Grundannahmen der diskreten Wahltheorie ändert sich an den modellierten Auswahlwahrscheinlichkeiten nichts, wenn man deterministischen *und* Zufallsnutzen mit einem festen positiven Faktor multipliziert. Skaliert man im Probitmodell die Standardabweichung des Zufallsnutzens auf die des Logitmodells hoch, wäre dieser Faktor $\pi/\sqrt{6}$. Da die exogenen Variablen ja gleich sind, impliziert dies eine Multiplikation der Parameter des parameterlinearen Modells um diesen Faktor.

Die annähernde Gleichheit der modellierten Wahrscheinlichkeiten und der reskalierten Probitparameter mit den Logit-Schätzern hat dieselbe Ursache: Die Gumbelverteilung hat ein ähnliches Aussehen wie die Normalverteilung. Umgekehrt bedeutet dies, dass die etwas willkürliche Annahme einer Gumbelverteilung, einzig mit dem Ziel eines expliziten Ausdrucks der modellierten Wahrscheinlichkeiten, nicht zu wesentlichen Differenzen zum statistisch besser begründeten Probitmodell (Zentraler Grenzwertsatz) hat.[1] Ausnahmen gibt es nur bei extrem kleinen Wahrscheinlichkeiten bzw. Wahrscheinlichkleiten sehr nahe bei 1, da die Extremwerte beider Verteilungen anderen Grenzverteilungen gehorchen: Wahrscheinlichkeiten proportional zu $e^{-(V_1-V_2)^2/4}$ beim Probit- und proportional zu $e^{-(V_1-V_2)}$ beim Logitmodell.

(f) Bei Quotientenbildung kürzen sich gemeinsame Skalenfaktoren weg. Man erwartet also annähernd gleiche Quotienten, auch wenn die geschätzten Parameter der Logit- und Probitmodelle deutlich differieren. Beispiel Zeitwert $60\beta_2/\beta_3$ in Euro pro Stunden

$$60\frac{\beta_2^{\mathrm{P}}}{\beta_3^{\mathrm{P}}} = 60\frac{-0.229}{-3.67} = 3.74\,\mathrm{Eur/h}, \quad 60\frac{\beta_2^{\mathrm{L}}}{\beta_3^{\mathrm{L}}} = 60\frac{-0.283}{-4.59} = 3.70\,\mathrm{Eur/h}.$$

[1] Schreibt man korrelierte Zufallsnutzen mit einer allgemeinen Korrelationsmatrix vor, ist das dann nicht auf iid spezialisierte Probitmodell sogar besser zu handhaben als ein entsprechende Verallgemeinerung des Logitmodells.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6.3: Versuchspläne der Conjoint-Analyse

(a) Versuchsplan des *full factorial design*:

$$
\begin{aligned}
&\text{Choice Set 1:}(-20\,\text{min}, -1€),\\
&\text{Choice Set 2:}(-20\,\text{min}, 1€),\\
&\text{Choice Set 3:}(0\,\text{min}, -1€),\\
&\text{Choice Set 4:}(0\,\text{min}, 1€),\\
&\text{Choice Set 5:}(20\,\text{min}, -1€),\\
&\text{Choice Set 6:}(20\,\text{min}, 1€).
\end{aligned}
$$

(b) Die Zeit- und Kostendifferenzen sind bei den drei Choice Sets $(-20\,\text{min}, -1€)$, $(20\,\text{min}, -1€)$, und $(20\,\text{min}, 1€)$ positiv korreliert. Also ist dieser Versuchsplan *nicht* nach dem orthogonalem Design aufgebaut.