5 Ökonometrische Verflechtungsmodelle

5.1 Allgemeines

Eine wichtige Aufgabenstellung der Ökonometrie und insbesondere der Verkehrsökonometrie ist die quantitative Beschreibung der Ströme von Waren, Produkten und sonstiger wirtschaftlicher Leistungen vom Anbieter (Output) zum Empfänger (Input). Dies ist nichttrivial, da Produkte und Dienstleistungen nicht nur vom Endverbraucher konsumiert werden, sondern auch von den Herstellern/Anbietern dieser oder anderer Produkte und Dienstleistungen.

Ein aktuelles Beispiel ist die Frage, wie viel CO_2 die Atomkraftwerke (AKW) effektiv zur Herstellung einer kWh an Strom erzeugen (Abb. 5.1 und 5.2). Die Frage ist nun: Wie hoch ist die tatsächliche Kohlendioxidbilanz (g CO_2 pro kWh), wenn man nicht nur den direkten Output, sondern auch die unendliche Kette all dieser indirekten Emissionen berücksichtigt? Wie hoch ist diese Bilanz im Vergleich der Gesamtbilanz für Kohle- oder Gaskraftwerken oder bei der Erzeugung erneuerbarer Energie?[1]

Generell bewirken diese Kopplungen, dass Nachfrageschwankungen bezüglich eines Wirtschaftsbereiches auch die anderen Sektoren beeinflussen. Beispielsweise bewirkt eine steigende Nachfrage nach Kraftfahrzeugen auch eine Konjunktur bei den Herstellern von Stahl, beim Maschinenbau und bei der Kfz-Elektronik. Dadurch ergibt sich folgende Fragestellung:

Problemformulierung: Wie ändern sich die Nachfragen nach Produkten oder Dienstleistungen der verschiedenen Wirtschaftszweige, wenn sich die Nachfrage der Endverbraucher an Leistungen eines bestimmten Wirtschaftszweiges um einen bestimmten Betrag ändert?

5.2 Formulierung des Verflechtungsmodells

Bemerkenswerterweise lassen sich im linearen statischen Grenzfall all diese Verflechtungen und Kopplungen sehr kompakt durch das ökonometrische **Verflechtungsmodell**, auch **Input-Output-Modell (IOM)** oder nach seinem Begründer Wassily Leontief **Leontief-Modell** genannt, beschreiben. Im Rahmen dieses Modells gliedert man die gesamte Volkswirtschaft in verschiedene Sektoren $i = 1, \dots, n$ auf und modelliert die

[1] Die Durchführung der Rechnung ergibt für AKWs etwa 40 g CO_2/kWh, für Kohlekraftwerke etwa 800 g CO_2/kWh und für alternative Energiequellen 50-100 g CO_2/kWh.

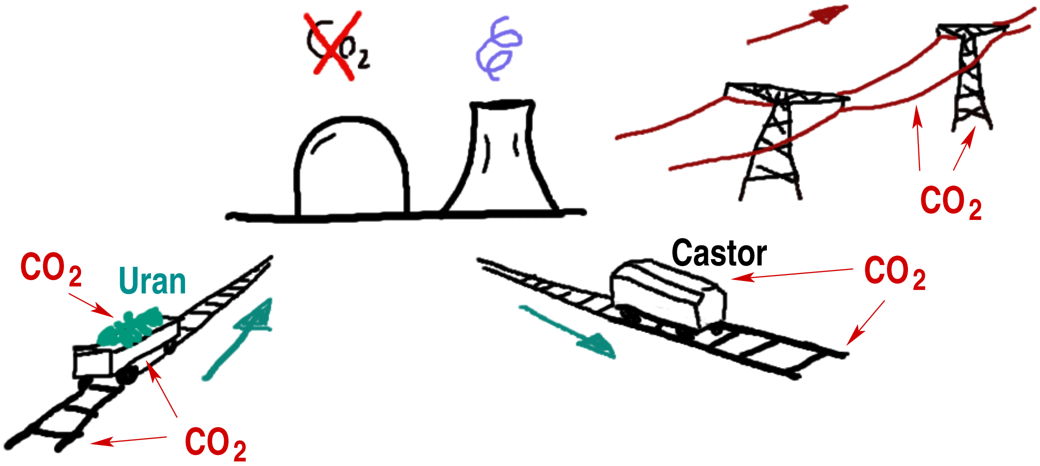


Abbildung 5.1: Atomkraftwerke (AKW) emittieren bei der eigentlichen Stromerzeugung durch Kernspaltung keinerlei CO_2. Aber zum Betrieb eines AKW sind andere Produkte und Dienstleistungen nötig, deren Bereitstellung sehr wohl mit der Emission von CO_2 verbunden ist: Rohstoffgewinnung, die Aufbereitung des Rohstoffes zum Brennstoff, Entsorgung, der Transport von Roh- Brenn- und Abfallstoffen sowie der elektrischen Energie, Bereitstellung und Betrieb der Infrastruktur zum Transport von Warenströmen und elektrischer Energie (Hochspannungsleitung), aber auch anteilig der Bau sowie der Betrieb (u.a. Heizung) der eigentlichen Bauwerke der Anlage usw. Diese Kette muss man, streng genommen, ad infinitum fortsetzen: Unter anderem sollten auch die Emissionen durch die Heizung der Verwaltungsgebäude der Firmen, welche die Anlage herstellen oder den Stahl für die Strommasten liefern, anteilig enthalten sein.

Waren- und Dienstleistungsströme x_{ij} vom Sektor i nach j sowie die Ströme y_i vom Sektor i zum Endverbraucher[2] durch eine *lineare, zeitunabhängige, deterministische* Kopplung:

$$x_i = y_i + \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = y_i + \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j. \tag{5.1}$$

Hierbei bedeuten (vgl. auch Abb. 5.2):

- x_i der Gesamtausstoß an Produkten oder Leistungen im Sektor i in mit den anderen Sektoren kommensurablen Einheiten (im Allgemeinen Geldeinheiten),
- x_{ij} die Menge an Produkten oder Dienstleistungen des Sektors i, welche für Sektor j benötigt wird,
- y_i die direkt von Sektor i an den Endverbraucher bzw. an nicht direkt berücksichtigte Sektoren gehenden Produkte oder Leistungen,
- A_{ij} die Elemente der **Koeffizientenmatrix des direkten Aufwandes**, also die Zahl der Einheiten des Produkts/der Dienstleistung i, welche zur Herstellung/Erbringung einer Einheit des Produkts/der Dienstleistung des Sektors j benötigt wird.

Die verrschiedenen Sektoren werden beispielsweise duch die Input-Output-Rechnung des Bundes definiert. In der aktuellsten Ausgabe 2009 werden 73 Sektoren unterschieden[3] Das IOM ist durch folgende Annahmen charakterisiert:

- Alle Güter- und Dienstlestungsströme müssen sich *genau einem Sektor* zuordnen lassen, z.B. einem der 73 Sektoren der Input-Output-Rechnung des Bundes.
- Alle Ströme werden in *Geldeinheiten* pro Zeiteinheit gemessen.
- Es wird *Stationarität* angenommen, d.h. alle Ströme werden aus der laufenden Produktion gespeist. Lagerbestände sowie ggf. die Altersstruktur der Güter (z.B. beim Fahrzeugsektor) bleiben unverändert.
- Es wird *Linearität* angenommen. Skaleneffekte, beispielsweise Effizienzsteigerungen durch Massenproduktion, bleiben unberücksichtigt.

Im Rahmen der allgemeinen Klassifikation ökonometrischer Modelle stellt das Verflechtungsmodell ein lineares, statisches, deterministisches Modell mit Kopplung dar:

[2] Der Begriff des "Endverbrauchers" kann auch allgemeiner gefasst werden und neben dem eigentlichen Konsumenten auch alle externen Sektoren umfassen, die man in einer gegebenen Untersuchung nicht separat erfassen will.

[3] Statistisches Bundesamt (2013): Volkswirtschaftliche Gesamtrechnungen – Input- Output-Rechnung 2009, `https://www.destatis.de/` (Zugriff 06.08.2013).

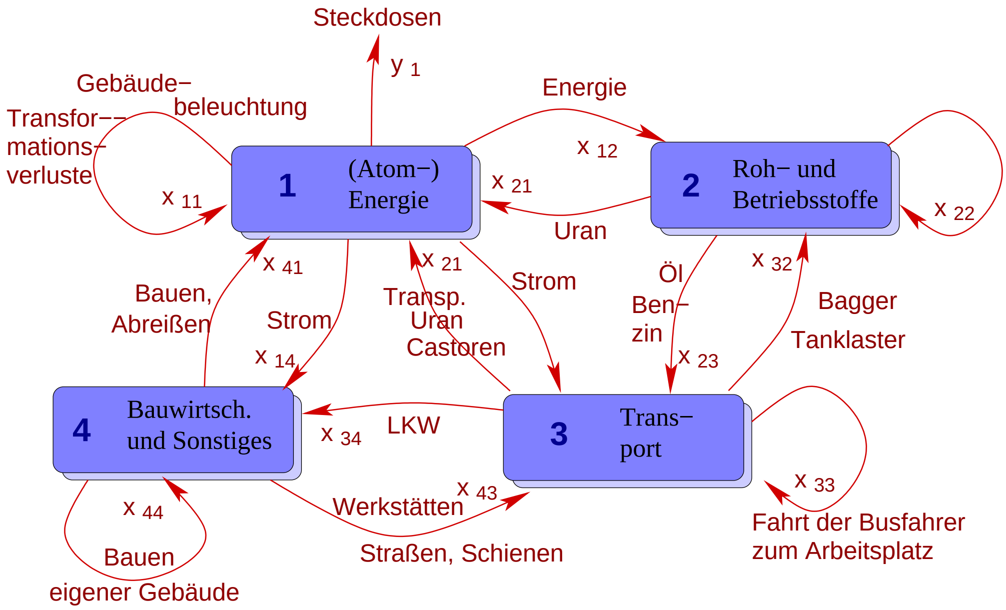


Abbildung 5.2: Auswahl an Güterströmen im AKW-Beispiel.

- Die endogenen Variablen[4] sind durch die Gesamtproduktionen x_i der Sektoren gegeben. Die verschiedenen x_i sind gekoppelt, da sie auch auf der rechten Seite der Gleichungen vorkommen.
- Die exogenen Variablen sind durch die externen Nachfragen y_i gegeben.
- Die Modellparameter sind durch die Elemente A_{ij} gegeben.

Je nach Sachverhalt ist es sinnvoll, die x_i und y_i entweder als **Bestandsmassen** oder **Bewegungsmassen** zu definieren.

- Bewegungsmassen sind nur über Zeit*intervalle* definiert und nehmen im **Fließgleichgewicht** linear mit der Länge des Intervalls zu. Es handelt sich um Güter*mengen*, welche z.B. durch den Wert in € angegeben werden.
- Bestandsmassen sind für Zeit*punkte* definiert. Es handelt sich um Güter*ströme*, welche z.B. durch die “Stromstärke” in €/h gemessen werden. Im Fließgleichgewicht sind sie konstant.

[4] Um Kompatibilität mit den sonstigen Darstellungen des IOM zu bewahren, bedeuten hier ausnahmsweise y_i die exogenen und x_i die endogenen Variablen. Ohnehin ist die Interpretation “exogen” bzw. “endogen” hier nicht eindeutig zu treffen. Handelt es sich um eine rein nachfragegetriebene (Keynesianische) Wirtschaft, ist der Nachfragevektor $\boldsymbol{y}$ exogen (die Nachfrage bestimmt das Angebot $\boldsymbol{x}$). Bei angebotsgetriebenen Märkten (“der Kunde muss essen, was auf den Tisch kommt”) ist es umgekehrt.

Häufig ist es am anschaulichsten, alles als Bestandsmassen bei festen Betrachtungs-Zeitintervall anzusehen, vgl. die Beispiele.

Die Modellparameter, also die **Koeffizienten A_{ij} des direkten Aufwandes**, werden an den ökonomischen Sachverhalt angepasst, indem die tatsächlichen Verhältnisse in die Definitionsgleichung

$$\boxed{A_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}} \tag{5.2}$$

eingesetzt werden bzw. das Modell bezüglich dieser Parameter kalibriert wird. In Worten bedeutet Gl. (5.2):

> Der direkte Aufwandskoeffizient A_{ij} ist die Zahl der Einheiten des Wirtschaftsgut i, welche direkt zur Herstellung einer Einheit des Produktes j bzw. Erbringung einer Einheit der Dienstelistung j benötigt wird.

Verständnisfrage:
Machen Sie sich klar, dass im Falle der Verwendung kommensurabler Einheiten (z.B. der Waren- oder Dienstleistungswert in €) die Koeffizient des direkten Aufwandes nur im Bereich $0 \le A_{ij} < 1$ liegen dürfen.

Antwort: Da sonst nach Gl. (5.1) ein Teil des Güterstroms größer ist als der gesamte Strom.

5.2.1 Kompakte Formulierung in Vektor-Matrix-Notation

Das Verflechtungsmodell 5.1 stellt ein lineares inhomogenes Gleichungssystem für die unbekannten Gesamtproduktionen x_i bei gegebenen externen Nachfragen y_i dar. Zur Darstellung der formalen (und auch der expliziten) Lösung dieses Systems werden die Produktionen und externen Nachfragen durch Spaltenvektoren dargestellt:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^T &= (x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \boldsymbol{y}^T &= (y_1, y_2, \dots, y_n). \end{aligned}$$

Hierbei bedeutet, wie im Kapitel 2, das Superskript T, “transponiert”. Damit kann man (5.1) schreiben als

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

oder

$$\boxed{\boldsymbol{x} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}.} \tag{5.4}$$

5.3 Lösung des Verflechtungsmodells

Mit der Einheitsmatrix

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{M} = \mathbf{1} - \mathbf{A}$$

kann man Gl. (5.4) schreiben als

$$\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}.$$

Ist $\mathbf{M}$ invertierbar, gibt es also eine Inverse $\mathbf{M}^{-1}$ mit $\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^{-1} = \mathbf{1}$, so kann man diese Gleichung durch Links-Multiplikation von $\mathbf{M}^{-1}$ "lösen":

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{x} &= \mathbf{M}^{-1} \cdot \boldsymbol{y}, \\ \boldsymbol{x} &= \mathbf{M}^{-1} \cdot \boldsymbol{y}. \end{aligned}$$

Dies führt nach Einsetzen der Definition von $\mathbf{M}$ zur formalen Lösung des Verflechtungsmodells:

$$\boldsymbol{x} = (\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \boldsymbol{y} \equiv \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{y}. \tag{5.5}$$

Hierbei wird die neu definierte Matrix $\mathbf{B} = (\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}$ als die **Koeffizientenmatrix des vollen Aufwandes** bezeichnet. Die Bedeutung ihrer Elemente ist wie folgt:

> B_{ij} ist die Menge an Wirtschaftsgut i, welche zur Herstellung einer Einheit des Wirtschaftsgutes j vom Sektor j selbst *und von allen Zuliefersektoren k* des Sektors j benötigt wird. Also die Menge an Wirtschaftsgut i, welche zur Bereitstellung einer Einheit von j *an den Verbraucher* benötigt wird.

5.3.1 Veranschaulichung der Koeffizientenmatrix des vollen Aufwandes

Ist eine Funktion durch eine Reihenentwicklung definiert, wie $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots$ oder auch z.B. $\cos(x)$, so sind als Argumente dieser Funktion nicht nur Zahlenwerte möglich, sondern alle Objekte, welche sich addieren, multiplizieren und invertieren lassen, wobei das Ergebnis dieser Operationen in der Objektmenge bleiben muss. Dies ist insbesondere für die Menge der quadratische Matrizen erfüllt.[5] Insbesondere gilt dies für die "geometrische Reihe"

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} x^j.$$

[5] Genauer muss die sog. "Gruppeneigenschaft" bezüglich Addition und Multiplikation erfüllt sein, das Ergebnis dieser Operationen muss also wieder ein Element aus der betrachteten Objektmenge sein; dies ist z.B. bei Vektoren mit dem Skalarprodukt als Multiplikation nicht erfüllt.

Schreibt man die Inverse einer Matrix $\mathbf{M}$ als $\mathbf{M}^{-1} ='' 1/\mathbf{M}''$ und $\mathbf{M}\cdot\mathbf{M} = \mathbf{M}^2$, $\mathbf{M}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{M} = \mathbf{M}^3$ usw., sowie $\mathbf{M}^0 = \mathbf{1}$, sieht man, dass die Lösung des Input-Output-Modells nichts anderes ist als die geometrische Reihe, angewandt auf die Matrix A:

$$\mathbf{B} = (\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1} = \text{“}\frac{1}{\mathbf{1} - \mathbf{A}}'' = \mathbf{1} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{A}^j. \tag{5.6}$$

Im Folgenden wird anhand von zwei Sektoren gezeigt, wie diese unendliche Reihe die unendliche Sequenz der Kopplungen repräsentiert.

Beispiel: Zwei-Sektoren-Modell

Es werden die beiden Sektoren

- Sektor 1: Transport und Verkehr,
- Sektor 2: Maschinenbau

betrachtet. Ferner werden alle anderen Sektoren zu den externen Verbrauchern, also zu den Konsumenten y_i von Verkehr und Maschinenbau, gezählt. Es soll gelten

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Sektoren verbrauchen also je 25% ihrer Produkte für den Eigenbedarf und benötigen außerdem Produkte des jeweils anderen Sektors in einer Menge, welche ein Viertel des Wertes der gesamten eigenen Produktion entspricht. Fortgesetzte Matrixmultiplikation ergibt für $n \geq 1$

$$\mathbf{A}^n = \frac{1}{2^{n+1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und damit z.B.

$$B_{11} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{A}^j \right)_{11} = 1 + \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^j = 1 + \frac{1}{4\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = \frac{3}{2},$$

und

$$B_{12} = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^j = \frac{1}{2}.$$

Damit kann man die Kopplungen der Wirtschaftssektoren Verkehr und Maschinenbau veranschaulichen: Der Koeffizient B_{11} hat die Anteile

$$B_{11} = \left(\mathbf{1} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 + \ldots\right)_{11} = 1 + A_{11} + \sum_{k=1}^{2} A_{1k} A_{k1} + \sum_{k=1}^{2} \sum_{l=1}^{2} A_{1k} A_{kl} A_{l1} + \ldots$$

mit den Bedeutungen

- Beitrag 1: Eine Einheit an Verkehrsleistung an die Endverbraucher.
- Beitrag $A_{11} = \frac{1}{4}$: Für eine Einheit an den Verbraucher benötigen die Verkehrsbetriebe 1/4 an Verkehrsleistungen für den Eigenbedarf (Arbeitswege des Personals, Überführung von Fahrzeugen, Wartungsfahrten, Leerfahrten zur ersten Einsatzstelle etc).
- Beitrag A_{11}^2: Der Eigenbedarf erhöht die Verkehrsnachfrage, welche wiederum *zusätzlichen* Eigenbedarf hervorruft. Ein Straßenbahnführer fährt z.B. mit ÖV zum Startpunkt seiner Schicht; aber auch die Fahrer dieser Verkehrsmittel nehmen Verkehrsleistung zum Antritt und am Ende *ihrer* Schicht in Anspruch.
- Beitrag $A_{12}A_{21}$: Die Verkehrsmittel altern und müssen kontinuierlich durch neue ersetzt werden (Anteilige Aufträge A_{21} an den Maschinenbau). Der Maschinenbau benötigt für seinen Betrieb (Mitarbeiterwege, Transport von Teilen etc) für eine Einheit eine Verkehrsleistung von A_{12} Einheiten, also für den an die Verkehrsbetriebe gelieferten Bruchteil A_{21} anteilig die Verkehrsleistung $A_{12}A_{21}$.
- Die Ströme höherer Ordnung werden schnell unübersehbar. Beispielsweise bedeutet der Beitrag $A_{12}A_{22}A_{21}$ die Verkehrsleistung A_{12} an den Maschinenbau, damit dieser seinen eigenen Maschinenpark up-to-date hält (A_{22}), um schließlich neue Fahrzeuge an den Verkehrssektor liefern zu können (A_{21}).

Aufgabe

Verdeutlichen Sie sich die Anteile von B_{12}.

5.3.2 Explizite Lösungen für zwei und drei Sektoren

Glücklicherweise nimmt einen die Inversion einer einzigen Matrix das Verfolgen der einzelnen Verflechtungen zwischen den Sektoren nach der Art des letzten Unterabschnitts ab. "Per Hand" kann man die Inverse einer $n \times n$ Matrix bis maximal für $n = 5$ sinnvoll mit dem **Gauß'schen Eliminationsverfahren** lösen, numerisch ist die Lösung auch für Hunderte von Sektoren problemlos (der Aufwand steigt mit n^3). Für 2×2 und 3×3 - Matrizen gibt es einfache explizite Formeln, vgl. Abschnitt 2.12.

Zwei Sektoren

Sei $\mathbf{M}$ eine allgemeine invertierbare 2×2 Matrix mit den Elementen M_{ij}. Dann gilt nach (2.123)

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{M})} \begin{pmatrix} M_{22} & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{11} \end{pmatrix}$$

und damit

$$\mathbf{B} = (\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{1} - \mathbf{A})} \begin{pmatrix} 1 - A_{22} & A_{12} \\ A_{21} & 1 - A_{11} \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

Das obige Beispiel für $A_{11} = A_{12} = A_{21} = A_{22} = \frac{1}{4}$ liefert

$$\mathbf{1} - \mathbf{A} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \det(\mathbf{1} - \mathbf{A}) = \frac{1}{16}(9-1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

also insbesondere die oben mittels der geometrischen Reihe berechneten Koeffizienten des vollen Aufwands $B_{11} = \frac{3}{2}$ und $B_{12} = \frac{1}{2}$.

Drei Sektoren

Hier benutzt man Gleichung (2.124). Alternativ kann man auch die Eigenschaften von Skalar- und Kreuzprodukten von Vektoren nutzen, vgl. (2.125). Schreibt man die drei Zeilen der Inversen einer invertierbaren 3×3 Matrix mit Hilfe von drei Zeilenvektoren,

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{z}_1^T- \\ -\boldsymbol{z}_2^T- \\ -\boldsymbol{z}_3^T- \end{pmatrix},$$

und die Spalten der Matrix selbst mit Spaltenvektoren,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \boldsymbol{m}_1 & \boldsymbol{m}_2 & \boldsymbol{m}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

dann gilt

$$\boldsymbol{z}_1 = \frac{\boldsymbol{m}_2 \times \boldsymbol{m}_3}{\det(\mathbf{M})}, \quad \boldsymbol{z}_2 = \frac{\boldsymbol{m}_3 \times \boldsymbol{m}_1}{\det(\mathbf{M})}. \quad \boldsymbol{z}_3 = \frac{\boldsymbol{m}_1 \times \boldsymbol{m}_2}{\det(\mathbf{M})}. \tag{5.8}$$

sowie

$$\det(\mathbf{M}) = \boldsymbol{m}_1 \cdot (\boldsymbol{m}_2 \times \boldsymbol{m}_3). \tag{5.9}$$

Natürlioch muss man zur Bestimmung der Matrix $\mathbf{B}$ für $\mathbf{M}$ wieder die Differenzmatrix $\mathbf{1} - \mathbf{A}$ einsetzen.

Aufgabe: Zwei-Sektor-Modell

Im obigen Beispiel der zwei Sektoren Verkehr und Maschinenbau mit den direkten Aufwandskoeffizienten $A_{11} = A_{12} = A_{21} = A_{22} = \frac{1}{4}$ ist bisher die externe Nachfrage nach Transport-Dienstleistungen doppelt so hoch wie die nach Produkten des Maschinenbaus. Nun erhöht sich die Nachfrage nach Verkehr um 10%, während die nach Produkten des Maschinenbaus unverändert bleibt. Um wieviel Prozent müssen die Gesamtleistungen der beiden Sektoren steigen, um die neue Nachfrage zu befriedigen?

5.4 Lebenszyklusanalyse und Einbindung des Input-Output-Modells

Ausgehend von einer aktuellen Fragestellung könnte dieser Abschnitt auch lauten: *Sind E-Fahrzeuge wirklich umweltfreundlicher?*. Die Lebenszyklusanalyse wird deshalb anhand der CO_2-Emissionen von Fahrzeugen erläutert, sie kann aber für beliebige, Ressourcenverbrauch oder Emissionen betreffende Produkten oder Prozessen eingesetzt werden wie die Emissionen bei Produktion eines Kilowatts elektrischer Energie aus Kohle- oder Atomkraftwerken, Windkraft, Wasserkraft, Biomasse, Sonnenzellen oder Solarthermie.

Hintergrund ist, dass Elektrofahrzeuge im Betrieb *lokal* weder CO_2 noch andere Schadstoffe (außer Feinstaub) emittieren, weshalb sie von einigen Stadtverwaltern sehr geliebt werden, um lokale Umweltprobleme zu mildern. Aber geht man hier nicht lediglich nach dem St-Florians-Prinzip vor? Dies ist insbesondere für nichtflüchtige Emissionen, allen voran CO_2, relevant. Früher oder später verteilen sie diese weltweit, egal ob sie im Betrieb lokal (Verbrennungsmotoren), nichtlokal (Produktion der Kraftstoffe bei Verbrennungsmotoren, Stromerzeugung bei E-Fahrzeugen, außerdem Verschleißteile und Verbrauchsmaterialien), oder in vor- oder nachgelagerten Prozessen (Herstellung, Entsorgung) anfallen. Dies gilt im abgemilderter Schärfe auch für konventionelle Kfz mit Verbrennungsmotor, bei der neben den direkten CO_2 Emissionen beim Betrieb ebenfalls weitere Emissionen anfallen.

Man benötigt also eine Analysemethode, welche *alle* Emissionen erfasst, welche irgendwo oder irgendwann unmittelbar oder mittelbar durch die Nutzung eines Fahrzeugs (oder allgemein bei der Nutzung eines ressourcenverbrauchenden und die Umwelt beeinflussenden Produkts oder Prozesses) anfallen. Dazu werden zwei Methoden kombiniert:

- Die **Lebenszyklusanalyse** bzw. **Life-Cycle-Assessment (LCA)**, auch **Ökobilanz** genannt, umfasst welche alle direkt mit der Herstellung, dem Betrieb und der Entsorgung anfallenden Emissionen umfasst,
- und die Input-Output-Analse mit dem IOM, welche alle durch Verflechtungseffekte anfallenden indirekten Emissionen berücksichtigt.[6] Die LCA wird in das Input-Output-Modell meist mittels der hybriden Methodik **Econometric Input-Output LCA (EIO-LCA)** eingebunden.

Betrachtet man nur Emissionen pro End-Nachfrage (in Geldeinheiten) nach Produkten oder Dienstleistungen eines gewissen Sektors, kann man die EIO-LCA vereinfachen zur IOM-LCA.

5.4.1 Lebenszyklusanalyse (LCA)

Die Lebenszyklusanalyse verläuft in mehreren Schritten (vgl.Abbildung 5.3):

[6] Die Abgrenzung ist nicht immer scharf. Beispielsweise werden bei der LCA meist nicht nur die *Tank-to-Wheel* Emissionen durch die direkte Verbrennung berücksichtigt, sondern auch die *Well-to-Tank* Emissionen durch die Produktion und den Transport des Kraftstoffs bis in den Tank. Letztere könnte man auch mittels des IOM durch die Verflechtung des Sektors “Treibstoffe” mit “Transport”, “Verarbeitung” und “Bergbau” modellieren.

Abbildung 5.3: Vereinfachtes Flussdiagramm der Lebenszklusanalyse eines Kraftfahrzeugs bezüglich Emissionen (noch nicht vorhanden, vgl. Vorlesungsmitschrift)

1. Definition der Lebensphasen: Bei einem Fahrzeug sind das im Wesentlichen

- die Herstellung,
- der Betrieb
- und die Entsorgung.

2. Aufstellung der Sachbilanz: In jeder der Lebensphasen verbraucht einer betrachtete Einheit (hier: ein Auto) gewisse Mengen verschiedener Ressourcen wie

- y_1^s: Masse (kg) an Eisen/Stahl,
- y_2^s Menge (Liter) an Treibstoff (z.B. Benzin),
- y_3^s: Masse (kg) an Aluminium,
- y_4^s: Masse (kg) an Kunststoffen,
- y_5^s: Masse (kg) an Gummi

und weitere Materialien wie Gummi, Lack, Textilien usw. Über alle Lebensphasen summiert ergibt dies den Vektor $\boldsymbol{y}^s$ der **Sachbilanz**.

3. Aufstellung der Emissionsfaktoren: Die Bereitstellung der benötigten Materialien und Ressourcen ist mit Emissionen verschiedenster Schadstoffe verbunden. Dies definiert die sachbilanzbezogene Emissionsfaktoren-Matrix $\mathbf{C}^s$:

Bei n Posten der Sachbilanz (z.B. 1=Stahl, 2=Benzin) und m betrachteten Emissionsarten (z.B. 1=CO_2, 2=Feinstaub, 3=NO_x) ist die sachbilanzbezogene Emissionsfaktoren-Matrix $\mathbf{C}^s$ eine unsymmetrische reellwertige $n \times m$-Matrix. Die Komponente C_{ij}^s gibt an, wieviele Einheiten des Schadstoffes j bei der Herstellung einer Einheit des Postens i der Sachbilanz *einschließlich der kompletten Kette der Vorprodukte* (vgl. Abb. 5.4) im Mittel anfallen.

Die erste Spalte der Matrix betrifft also den ersten Schadstoff und die erste Zeile alle Schadstoffe des ersten Postens der Sachbilanz. Bei der Bereitstellung eines Liters Benzin von der Förderung bis zur Tankstelle (*Well-to-Tank*) fallen beispielsweise etwa 0.3 kg an CO_2 an. Das entsprechende Matrixelement ist also gleich

$$C_{21}^s = C_{WtT} = 0.3\,\text{kgCO}_2/\text{l}.$$

Meist wird hier nicht direkt CO_2, sondern das sogenannte **CO_2-Äquivalent** angegeben. Dabei wird die auf einen kg CO_2 bezogene Klimawirksamkeit aller Emissionen betrachtet. Auf einen 100-Jahres-Zeitraum bezogen, wird beispielsweise Methan 25-fach[7] und Lachgas 298 fach gewichtet.

4. Ermittlung der Gesamtemissionen während der Lebenszeit: Direkt anhand der Definition der Emissionsfaktorenmatrix ist offensichtlich, dass die mit der Herstellung der benötigten Materialien und Verbrauchsstoffe verbundenen Emissionen durch die Multiplikation der (transponierten) Faktorenmatrix mit der Materialbilanz gegeben sind. Hinzu kommen noch die direkt mit dem Verbrauch (hier von Benzin) verursachten Emissionen:

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{LCA}} = \boldsymbol{e}^{\mathrm{dir}} + \mathbf{C}_s^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{y}^{\mathrm{s}} \tag{5.10}$$

Bei obiger Definitionen der Sachbilanz sind die CO_2-Emissionen durch die erste Komponente gegeben:

$$e_{\mathrm{CO2}} = e_1 = e_1^{\mathrm{dir}} + \sum_{j=1}^{n} C_{j1}^{\mathrm{S}} y_j^{\mathrm{s}} \tag{5.11}$$

Die direkten Emissionen sind bei Verbrennungsmotorfahrzeugen durch die **Tank-to-Wheel** Emissionen, multipliziert mit der Laufleistung L während der Lebenszeit, gegeben:

$$e_1^{\mathrm{dir}} = C_{\mathrm{TtW}} L \tag{5.12}$$

Die Tank-to-Wheel Emissionen ergeben sich dadurch, dass Benzin oder Diesel im Wesentlichen vollständig verbrennen, dass heißt, jedes Kohlenstoffatom im Treibstoff verbindet sich mit dem Luftsauerstoff zu einem CO_2-Molekül. Damit ergibt sich

$$C_{\mathrm{TtW}} = \rho f_c \frac{M_{\mathrm{CO2}}}{M_C} \tag{5.13}$$

mit der Dichte ρ in kg pro Litern, dem Gewichtsanteil f_C an Kohlenstoff im Treibstoff und den Molmassen $M_{\mathrm{CO2}} = 44\,\mathrm{g}$ sowie $M_C = 12\,\mathrm{g}$. Dies ergibt für Benzin etwa 2.4 kg/l und für Diesel etwa 2.65 kg/l.

5. Bezug auf eine Leistungseinheit: Schließlich werden die Lebenszeit-Emissionen auf eine Leistungseinheit, hier also auf einen Kilometer Laufleistung, bezogen:

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{spez}} = \frac{1}{L}\boldsymbol{e} \tag{5.14}$$

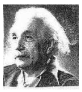
Mit üblichen Annahmen ergibt sich bei Kompaktklasse-Benzinfahrzeugen etwa $e_{1,spez} = 180\,\mathrm{g/km}$, während die direkten Emissionen bei etwa 140 g/km (entspricht einem Verbrauch von 5.8 Liter Benzin auf 100 km) liegen.

[7] Damit wird auc der Grund klar, warum ein Kilogramm Rindfleisch so einen hohen Emissionsfaktor bezüglich CO_2 hat: Vornehm ausgedrückt, sind es die Flatulenzen der Kühe.

Abbildung 5.4: Die gesamte Kette der Well-to-Tank Emissionen bei der Bereitstellung eines Liters an Benzin (noch nicht vorhanden, vgl. Vorlesungsmitschrift).

Verständnisfrage:
Wie würde man bei der LCA-Ananlyse eines Elektrofahrzeugs vorgehen? Was sind hier die wichtigsten Posten der Sachbilanz? Wie hoch sind hier die direkten CO_2-Emissionen e_1^{dir}?

5.4.2 Econometric Input-Output LCA (EIO-LCA)



Im Allgemeinen wird das Input-Output-Modell für volkswirtscahfliche Fragestellungen angewandt und dabei die gesamte Volkswirtschaft in Sektoren gegliedert. Gelingte es jedoch, die Sachbilanz auf diese Sektoren abzubilden, ist auch eine **produktbezogene Input-Output-Analyse** möglich. Das EIO-LCA verbindet diese Abbildungen mit einer Lebenszyklusanalyse und umfasst folgende Schritte:

1. Definition der Lebensphasen: Wie bei der LCA.

2. Aufstellung der Sachbilanz: Im Wesentliche wie bei der LCA. Allerdings sollte man zusätzliche rein dienstleistungsorientierte Aktivitäten während eines Autolebens zusätzlich berücksichtigen, beispielsweise Reparatur-Dienstleistungen, was hier als **erweiterte Sachbilanz** bezeichnet wird.

3. Abbildung der Sachbilanz auf den IOM-Nachfragevektor: Aufgrund der Datenlage kann man die volkswirtschaftlichen Sektoren nicht frei wählen, sondern zieht beispielsweise die Einteilung des Statistischen Bundesamtes in 71 Sektoren heran.

Knackpunkt ist es, die n Posten der Sachbilanz in die N Einträge des sektorbezogenen Nachfragevektors $\boldsymbol{y}$ (bzw, in eine Untermenge davon) abzubilden. Im Allgemeinen bezieht sich ein Posten der Sachbilanz auf mehrere Sektoren und mehrere Posten der Sachbilanz können zur Nachfrage ein- und desselben Sektors beitragen. Nimmt man an, dass der Zusammenhang linear-statisch ist, entspricht die Abbildung daher einer reellwertigen $N \times n$-Matrix $\mathbf{T}$:

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{y}^{\text{s}} \tag{5.15}$$

Neben der eigentlichen Abbildung beinhaltet diese Matrix auch eine Transformation auf einheitliche Einheiten, also auf Geldeinheiten.

Im obigen Beispiel bildet die erste Spalte von $\mathbf{T}$ den Sachbilanzposten y_1^s: "Eisen und Stahl" auf die volkswirtschaftlichen Sektoren ab. Verwendet man die 73 Sektoren des

Bundes, gibt es im Wesentlichen nur einen von null signifikant unterschiedlichen Eintrag: den Sektor 27.10: “Roheisen, Stahl und Ferrol”. Diese Spalte hat also nur einen von null signifikant unterschiedlichen Eintrag, z.B. 3 €/kg, wenn dies der Preis von einem kg Stahl ist. Die zweite Spalte bildet den Sachbilanzposten y_2^s: “Benzin” auf den Sektor 11:00: “Erdöl, Erdgas und -produkte” ab. Der entsprechende Wert des $\mathbf{T}$-Elements ist der aktuelle Treibstoffpreis in Euro pro Liter. Schließlich werden die Sachbilanzposten Aluminium, Kupfer und Lithium (wichtig als Material für die Batterie von Elektroautos) alle auf den Sektor 27.00: “NE-Metalle” abgebildet. Hier sieht man einen Nachteil des Verfahrens: Materialien mit unterschiedlichen Emissionen bei der Herstellung (die Herstellung eines kg an Kupfer impliziert weniger CO_2 Emissionen als Aluminium oder gar Lithium) werden im Wesentlichen auf den selben Sektor abgebildet und damit gleichbehandelt. [8]

4. Berechnung des Produktionsvektors mit der Standard-IOM: Mit der Abbildung (5.15) der erweiterten Sachbilanz auf den Nachfragevektor ist der Übergang zur IOM vollzogen und die Abbildung auf den Produktionsvektor entspricht der Standardabbildung der IOM mit der Matrix des vollen Aufwandes:

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{B}\boldsymbol{y} = (\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{y}$$

Bei Fahrzeugen koppelt die Matrix $\mathbf{B}$ den Nachfragevektor insbesondere stark an den Sektor 38.00: “elektrische Energie”, auch wenn dieser bei Benzin-Fahrzeugen nicht direkt in der erweiterten Sachbilanz vorkommt.

5. Ermittlung der Gesamtemissionen: Der Emissionsvektor berechnet sich aus dem Produktionsvektor mittels der sektorbezogenen Emissionsfaktorenmatrix:

> Die sektorbezogene Emissionsfaktormatrix $\mathbf{C}$ ist eine $N \times m$-Matrix. Die Komponente C_{ij} gibt an, wieviele Einheiten des Schadstoffes j bei der Herstellung eines Gegenwertes von einem Euro des Gutes i *direkt* anfallen. Im Gegensatz zur Matrix $\mathbf{C}^{\mathrm{s}}$ werden die Vorketten *nicht* berücksichtigt, da diese ja in viel vollständigerer Form einschließlich aller Rückkopplungen durch die Verflechtungsmatrix $\mathbf{B}$ abgebildet werden.

Nach Definition ergibt dies

$$e_{\text{EIO-LCA}} = \boldsymbol{e}^{\text{dir}} + \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}^{\text{dir}} + \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}^{\text{dir}} + \mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{y} \tag{5.16}$$

Diese Hauptformel sieht ähnlich aus wie Gl. (5.10) der konventionellen LCA. Insbesondere werden die direkten Emissionen $\boldsymbol{e}^{\text{dir}}$ gleich berechnet. Es gibt aber folgende Unterschiede:

[8] Die Skalierung auf den Preis anstelle auf die Masse lindert diesen Nachteil allerdings etwas: Ist Lithium beispielsweise pro kg 10 mal so teuer wie Kupfer, würden auch die Emissionen pro kg um den Faktor 10 höher berechnet.

- Der Nachfragevektor $\boldsymbol{y}$ bezieht sich auf die volkswirtschaftlichen Sektoren in Euro anstelle auf den Sachbilanzvektor $\boldsymbol{y}^{\mathrm{s}}$ in physikalischen Einheiten
- Die Emissionsfaktormatrix $\mathbf{C}$ enthält nur die direkten Beiträge, nicht die Vorketten wie die in $\mathbf{C}^{\mathrm{s}}$ enthaltenen produktbezogenen Emissionsfaktoren
- Dafür ist statt der Einheitsmatrix bei der konventionellen LCA die Kopplung der Sektoren untereinander durch die Matrix $\mathbf{B} = (\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}$ berücksichtigt.

5.4.3 Emissionen bei direkter Verwendung des IOM (IOM-LCA)

Betrachtet man keine Einzelprodukte sondern die durch eine Geldeinheit an Nachfrage in den verschiedenen Sektoren verursachten Emissionen, ist es meist günstiger, alle direkten Emissionen in die Emissionsfaktorenmatrix $\mathbf{C}$ zu stecken. Dazu ist es allerdings notwendig, dass die Ergebnisse von aggregierten Lebenszyklusanalysen für die Produkte bzw. Dienstleistungen der betrachteten Sektoren in Form einer sektorbezogenen direkten Emissionsfaktorenmatrix $\mathbf{C}$ vorliegen. Betrachtet man beispielsweise den Sektor des ÖPNV, werden die direkten Emissionen beim Betrieb der Busse oder Diesel-Loks (elektrifizierte Verkehrsmittel haben ja keine direkten Emissionen sondern nur indirekte über die Verflechtungseffekte bzw. Vorketten!) auf den Fahrpreis umgelegt. Formel (5.16) vereinfacht sich dann zu

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{IOM}} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\boldsymbol{y} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{y} \tag{5.17}$$

5.4.4 Konsistenz der Methode bei Preissteigerungen

Da man, wie bereits in Abschnitt 5.2 erwähnt, alle Güter und Dienstleistungen in kommensurable Einheiten darstellen muss, werden alle Größen auf den “kleinsten gemeinsamen Nenner” einer Geldeinheit (€) gebracht. Nun kümmert sich die Physik der Emissionen nicht um etwas so Menschliches und Veränderliches wie Preise.[9] Folglich müssen die nach (5.16) berechneten Emissionen unabhängig von den Preisen der einzelnen Waren und Dienstleistungen sein. Nun sind aber alle Matrizen und Vektoren des IOM und alle auf den rechten Seiten von (5.16) vorkommenden Größen auf Preiseinheiten bezogen, so dass sich diese mit den Preisen ändern. Im Folgenden zeigen wir, dass die Emissionen aber gegenüber Preisänderungen invariant sind, das Modell (5.16) also in dieser Hinsicht konsistent ist.

Wir beschreiben die Preisänderungen in den verschiedenen Sektoren durch einen Faktorvektor $\boldsymbol{f}$ bzw. eine quadratisch-diagonale Faktormatrix $\mathbf{F}$,

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} \text{Preissteigerungsfaktor Sektor 1} \\ \text{Preissteigerungsfaktor Sektor 2} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \operatorname{diag} \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 & 0 & \dots \\ 0 & f_2 & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}, \tag{5.18}$$

[9] Abgesehen davon, dass der Mensch selbst als Reaktion auf Preissteigerungen andere Produktionsmethoden verwendet, beispielsweise bei starkem Ölpreisanstieg eine vermehrte Nutzung sogenannter “nichtkonventioneller” Förderungsmethoden wie Öl aus Teersänden, welche deutlich mehr Energie und CO_2 Emissionen pro Liter implizieren. Dies würde aber im Rahmen des IOM durch eine Änderung der $\mathbf{A}$-Matrixelemente berücksichtigt werden.

welche die Preissteigerungen einer physikalischen bzw. organisatorischen Einheit der verschiedenen Sektoren beschreiben. Bei gleichem Verbrauch ändert sich der Endverbrauchsvektor $\boldsymbol{y}$ gemäß

$$\boldsymbol{y} \;\rightarrow\; \boldsymbol{y}^* = \mathbf{F}\boldsymbol{y},$$

während man direkt aus der Definition folgern kann, dass die neue Koeffizientenmatrix des direkten Aufwands aus der alten hervorgeht, indem man die Zeilen i mit f_i und die Spalten j mit $1/f_j$ multipliziert:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \frac{x_{ij}}{x_j} \;\Rightarrow \\ A^*_{ij} &= \frac{x^*_{ij}}{x^*_j} \\ &= \frac{f_i x_{ij}}{f_j x_j} = \frac{f_i}{f_j} A_{ij} \end{aligned}$$

Dies kann kompakt durch

$$\mathbf{A} \;\rightarrow\; \mathbf{A}^* = \mathbf{FAF}^{-1}$$

ausgedrückt werden (Beweis durch Nachrechnen). Zur Berechnung der neuen Koeffizientenmatrix des vollen Aufwands wendet man sinnvollerweise die Reihenentwicklung (5.6) an:

$$\mathbf{B}^* = (\mathbf{1} - \mathbf{A}^*)^{-1} = \mathbf{1} + \mathbf{A}^* + (\mathbf{A}^*)^2 + (\mathbf{A}^*)^3 + \ldots$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^*)^2 &= \mathbf{FAF}^{-1}\mathbf{FAF}^{-1} = \mathbf{FA}^2\mathbf{F}^{-1}, \\ (\mathbf{A}^*)^3 &= \mathbf{FAF}^{-1}\mathbf{FA}^2\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{FA}^3\mathbf{F}^{-1}, \\ \vdots &= \vdots \end{aligned}$$

also (unter Berücksichtigung der Assoziativität)

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^* &= \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbf{A}^*)^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{FA}^j\mathbf{F}^{-1} \\ &= \mathbf{F}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{A}^j\right)\mathbf{F}^{-1} \\ &= \mathbf{FBF}^{-1}. \end{aligned}$$

Schließlich müssen als Folge der Preisänderungen alle Zeilen i der Emissionsfaktormatrix mit $1/f_i$ multipliziert werden, da man bei Preissteigerungen pro Euro weniger vom Gut i produziert/verbraucht und damit auch weniger pro Euro emittiert:

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{C}$$

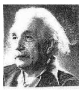
Damit ergibt sich nach (5.16) der Emissionsvektor nach Preissteigerungen zu

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}^* - \boldsymbol{e}^{\mathrm{dir}} &= (\mathbf{C}^*)^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^* \boldsymbol{y}^* \\ &= \left(\mathbf{F}^{-1}\mathbf{C}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{F}\mathbf{B}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}\boldsymbol{y} \\ &= \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{B}\boldsymbol{y} \\ &= \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e} - \boldsymbol{e}^{\mathrm{dir}}.\end{aligned}$$

Hierbei wurde in der vorletzten Zeile $(\mathbf{F}^{-1})^{\mathrm{T}} = \mathbf{F}^{-1}$ ausgenutzt.

Die Emissionen sind also, wie gefordert, invariant bezüglich Preisänderungen, obwohl sich alle beteiligten Größen ändern.

5.5 Dynamische Verflechtungsmodelle



Das klassische Verflechtungsmodell setzt instantane Anpassungen der Leistungen der einzelnen Sektoren an eine veränderte Nachfrage voraus, so dass zu jedem Zeitpunkt das System bezüglich der variablen Nachfrage im Gleichgewicht ist, also durch (5.1) beschrieben wird. Dies ist im Allgemeinen unrealistisch:

- Für höhere Produktion muss man neue Mitarbeiter einstellen, bei geringer Nachfrage entlassen,
- Maschinen und andere Investitionsgüter können ebenfalls nicht "über Nacht" besorgt oder verkauft/abgeschrieben werden. Während einer Übergangszeit muss deshalb eine gestiegene Nachfrage durch Abbau von Lagerbeständen befriedigt werden.

Bestenfalls können die Verantwortlichen über die *Steigerungsrate* $\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}$ des Produktionsausstoßes disponieren. Ist das System nachfrageorientiert, spielt also eine eventuelle Knappheit an Zulieferprodukten oder Rohstoffen keine Rolle, wird die Produktion hochgefahren (die Steigerungsrate ist positiv), wenn die Diskrepanz zwischen der externen Nachfrage y_i und dem beim momentanen Systemzustand für diese Nachfrage im Fließgleichgewicht zur Verfügung stehenden Angebot $y_i^{\mathrm{eff}} = x_i - \sum_j A_{ij} x_j$ positiv ist: "Die Nachfrage übersteigt das Angebot". Andernfalls wird die Produktion heruntergefahren.

Im einfachsten Fall wird dies linear modelliert und für jeden Sektor eine charakteristische Anpassungszeit τ_i angenommen, welche in der Größenordnung von Monaten oder Jahren liegt und von der "Schnelllebigkeit" der Investitionsgüter des jeweiligen Sektors abhängt. Dies führt zu folgendem linearen, dynamischen und gekoppelten Modell[10]

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\tau_i}\left[y_i - \left(x_i - \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j\right)\right] = \frac{1}{\tau}\left(y_i - y_i^{\mathrm{eq}}\right) \qquad (5.19)$$

[10] Dies ist nicht das klassische dynamische Leontief-Modell (LIOM), welches nur bei exponentiellem Wachstum funktioniert und ansonsten unrealistische instabile Lösungen liefert. Für das LIOM, siehe z.B. Holub/Schnabl, "Input-Output-Rechnung", Oldenbourg (1994), S. 556 ff, insbesondere S. 592.

In der Matrix-Vektor-Notation wird dies mit der Anpassungszeitmatrix

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 & \cdots & \\ 0 & \tau_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ & \cdots & 0 & \tau_n \end{pmatrix} \tag{5.20}$$

zu der kompakten Modelldarstellung

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{y} - (\mathbf{1} - \mathbf{A}) \cdot \boldsymbol{x}.} \tag{5.21}$$

Eigenschaften

- Bei konstanter Nachfrage, $\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} = 0$, nähert sich das System dem durch das klassische statische Modell (5.1) gekennzeichnete Gleichgewicht nach einer Zeit an, welche in etwa der längsten Einzelzeitkonstante, $\max(\tau_i)$, entspricht.
- Bei einen und zwei Sektoren sind keine Schwingungen möglich, auch keine gedämpften.

Mathematisch stellt das Modell ein System von linearen Differenzialgleichungen dar, welches mit den Methoden der linearen Algebra unschwer, aber häufig mühsam lösbar ist. Im Rahmen dieser Vorlesung werden allgemeine analytische Lösungen nur für der eindimensionalen Fall vorgestellt und ansonsten einige fertig gerechnete zweisektorale Lösungen als Beispiel vorgestellt.

5.5.1 Spezialfall: Dynamisches Ein-Sektor-Modell

Im dynamischen Ein-Sektor-Modell gibt es nur einen einzigen Waren und Dienstleistungen produzierenden Sektor (welcher die gesamte Wirtschaft darstellt), sowie die Verbraucher. Mit $x_1 = x$, $y_1 = y$ und $A_{11} = a$ reduziert sich das Modell (5.19) zu

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\tau} \left[y(t) - (1-a)x(t) \right].$$

Setzt man den eindimensionalen Koeffizient des vollen Aufwandes $b = 1/(1-a)$ sowie $\tilde{\tau} = b\tau$ und $\tilde{y} = by$, so wird dies zu

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\tilde{\tau}} \left[\tilde{y}(t) - x(t) \right]. \tag{5.22}$$

Hat man zur Zeit $t = 0$ den Ausgangszustand $x(0) = x_0$, so ist die Lösung dieser Differenzialgleichung in Abhängigkeit der Nachfragekurve $\tilde{y}(t) = by(t)$ für $t \geq 0$ gegeben durch

$$\boxed{x(t) = x_0 e^{-\frac{t}{\tilde{\tau}}} + \frac{1}{\tilde{\tau}} \int_0^t e^{-\frac{t-t'}{\tilde{\tau}}} \tilde{y}(t') \, \mathrm{d}t'.} \tag{5.23}$$

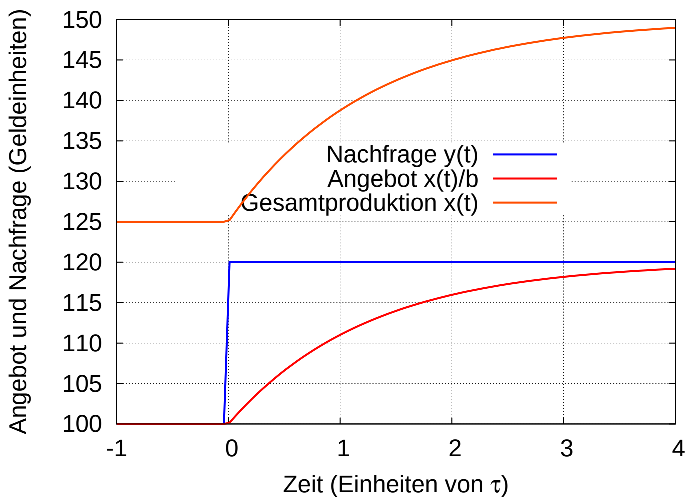


Abbildung 5.5: Dynamisches Einsektormodell: Anpassung der Gesamtproduktion und des der Nachfrage zur Verfügung Angebotes, wenn die Nachfrage sich zum Zeitpunkt $t = 0$ plötzlich um 20% ändert. ($A_{11} = a = 0.2$, $\tau = 1$).

Insbesondere gilt für eine zur Zeit $t = 0$ sprunghaft vom Wert y_a auf y_e sich ändernde Nachfrage die Lösung

$$x(t) = (x_0 - by_e)\, e^{-\frac{t}{b\tau}} + by_e. \tag{5.24}$$

Die Produktion passt sich also mit der Zeitkonstante $\tilde{\tau} = b\tau \geq \tau$ dem neuen, durch das klassische Ein-Sektor IOM gegebenen Gleichgewichtswert by_e an. Die Zeit $\tilde{\tau}$ ist etwas größer als τ, da sich die durch die erhöhte Produktion erhöhte interne Nachfrage mittels der Strategie "Steigerung proportional zur Differenz zwischen externer Nachfrage und Nettoangebot" sozusagen "herumsprechen" muss. Herrscht insbesondere bereits vor dem Sprung Gleichgewicht, $x_0 = by_a$, so ist das Ergebnis durch

$$x(t) = b\left(y_e + (y_a - y_e)e^{-\frac{t}{b\tau}}\right)$$

gegeben (vgl. Abbildung 5.5).

5.5.2 Varianten dynamischer Verflechtungsmodelle

Begrenzung durch das Angebot

Das durch Gl. (5.19) beschriebene dynamische IOM ist nachfragebestimmt, d.h. die Produktionssteigerungen sind proportional der Differenz aus Nachfrage y_i und Nettoangebot $((\mathbf{1} - \mathbf{A}) \cdot \boldsymbol{x})_i$. Bisweilen ist jedoch die Produktion nicht durch die Nachfrage begrenzt, sondern durch den Mangel an Rohstoffen oder anderen benötigten Zulieferprodukten.

Beispiel für zwei Sektoren Zum Herstellen von Solarzellen benötigt man Siliziumkristalle einer bestimmten Spezifikation. Obwohl es Silizium (ziemlich wortgetreu) "wie

Sand am Meer" gibt, ist die Verarbeitungsstufe zum Zustand, wie er bei Solarzellen benötigt wird, nur mit aufwändigen Investitionsgütern durchzuführen. Bezeichnet man den Rohstoff verarbeitenden Sektor (Silizium) als Sektor 1 und den Sektor alternativer Energieerzeugung (Solarzellen) als Sektor 2, hat Sektor 1 also eine hohe Zeitkonstante τ_1. Folgende, das Prinzip des Mechanismus nicht beeinflussende weitere Annahmen werden getroffen: Weder der Endverbraucher noch der Siliziumsektor benötigen selbst Silizium, $y_1 = A_{11} = 0$. Solarzellen werden nur vom Endverbraucher nachgefragt (die Sektoren benutzen für ihre Energiebedarf konventionelle Kraftwerke), also $A_{21} = A_{22} = 0$. Damit gilt im nachfragebegrenzten Zustand das dynamische IOM,

$$\begin{aligned} \tau_1 \tfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= -x_1 + A_{12}x_2, \\ \tau_2 \tfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= -x_2 + y_2. \end{aligned} \tag{5.25}$$

In der Gleichung für $\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}$ kommt x_1 gar nicht vor, da der Sektor x_1 die Produkte von Sektor 2 nicht benötigt, also für die Nachfrage irrelevant ist. Dass Sektor 2 wiederum das *Angebot* von Sektor 1 zu seiner Produktion benötigt, wird nicht berücksichtigt, woran man die Nachfrageorientierung dieses Ansatzes sieht.

Im angebotsbegrenzten Zustand, wie 2006 und 2007 bei den Solarzellen, ist die Produktion x_2 jedoch von der Verfügbarkeit geeigneten Siliziums begrenzt, so dass nur über kurze Zeit (Verwendung von Lagerbeständen) der Verbrauch $A_{12}x_2$ an Silizium den Zufluss $x_{12} = x_1$ (alles Silizium geht hier an die Solarzellenhersteller, da es für Sektor 1 keinen Endabnehmer gibt) überschreiten kann. Damit kann der Solarzellenausstoß x_2 nur kurzfristig (Zeitskala τ_2) den Wert x_1/A_{12} übersteigen und Gleichung (5.25) für x_2 wird zu

$$\tau_2 \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -x_2 + \frac{1}{A_{12}} x_1. \tag{5.26}$$

Die Nachfrage y_2 der Endabnehmer geht nun (über das Drängen von Sektor 2 an Sektor 1, doch mehr Silizium zu erzeugen) indirekt auf Sektor 1 über, so dass für diesen Sektor, der nachfragegetrieben bleibt, nun bei der Berücksichtigung der Nachfrage von Sektor 2 nicht dessen aktuellen Produktion x_2, sondern die nach dem statischen IOM *gewünschte* Produktion $x_2 = y_2$ relevant ist. Damit wird die Gleichung (5.25) für x_1 zu

$$\tau_1 \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -x_1 + A_{12}y_2. \tag{5.27}$$

Die kombinierte Dynamik kann jederzeit zwischen den für $y_2 <= x_1/A_{12}$ gültigen nachfragebegrenzten Zustand (5.25) und den sonst gültigen und durch (5.26) und (5.27) definierten angebotsbegrenzten Zustand wechseln.

Zahlenbeispiel Es sei $\tau_1 = 2$ und $\tau_2 = 0.5$ (Zeiteinheiten, z.B. Jahre). Die Hälfte des Wertes der Solarzellen bestehe in den eingekauften Siliziumkristallen, also $A_{12} = 0.5$. Im Ausgangszustand sei das System bei einer Nachfrage $y_2 = 1$ im durch das statische IOM gegebenen Gleichgewicht, also $x_2 = 2x_1 = y_2 = 1$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ steigt die Nachfrage sprunghaft von 1 auf 2. Da $\tau_1 > \tau_2$ will Sektor 2 die Produktion schneller als

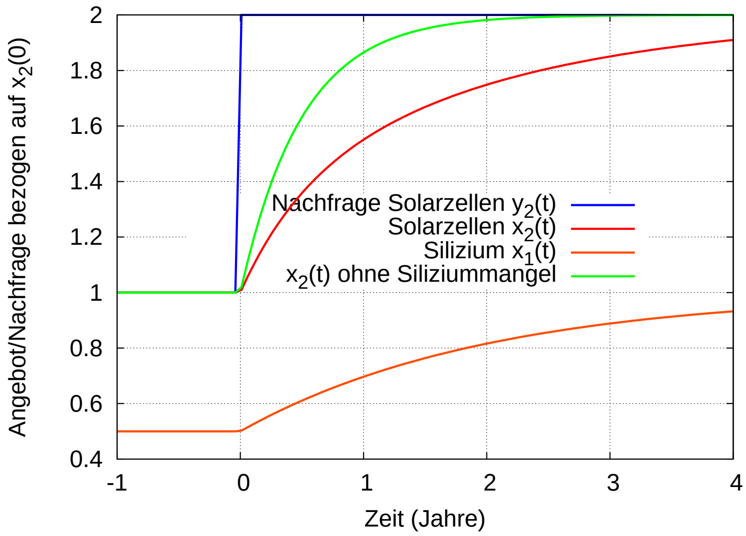


Abbildung 5.6: Reaktion der Sektoren 1 (Silizium) und 2 (Solarzellen) auf eine plötzliche Nachfragesteigerung um 100 %.

Sektor 1 hochfahren, so dass er in den angebotsbegrenzten Zustand gerät. Die Lösungen lauten (vgl. Abb. 5.6)

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}, \\
x_2 &= 2 - \frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-\frac{t}{2}}.
\end{aligned}
$$

Zum Vergleich lautet die Lösung für x_2 beim rein nachfragegetriebenen dynamischen IOM

$$x_2 = 1 - \frac{1}{2}e^{-2t}.$$

Verallgemeinerung auf mehr als zwei Sektoren

Bei mehreren Sektoren hat der Hersteller des knappen Gutes (wieder als Sektor 1 bezeichnet) im Allgemeinen die Wahl, mit welchem maximalen Anteil P_{1j} seiner Produktion er die Sektoren j und mit welchem maximalen Anteil P_{1y} er die externe Nachfrage bedient. (natürlich gilt $\sum_j P_{1j} + P_{1y} = 1$). Damit können die anderen Sektoren j ihre Brutto-Nachfrage $\sum_k A_{jk} + y_j$ nur dann bedienen, wenn diese die Zulieferbegrenzung $P_{1j}/A_{1j}x_1$ nicht übersteigt.

Generell kann sich jeder Sektor getrennt von den anderen im Nachfrage- oder Angebotsbestimmten Zustand befinden und sich dies auch jederzeit ändern, was das allgemeine System schnell unübersichtlich macht.[11]

[11] Vielleicht ist es deshalb so schwierig, zu bestimmen, ob der Ansatz von Keynes (die Nachfrage ist marktbestimmend) zutrifft oder nicht.

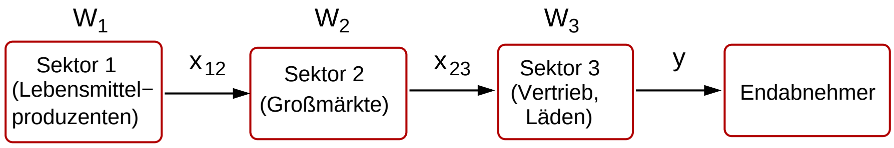


Abbildung 5.7: Materialfluss vom Produzenten über den Vertrieb zum Verbraucher.

5.5.3 Produktionsketten (Supply Chains)

Oft hat man Produktionsketten, bei denen der Endverbraucher erst über eine Reihe von Zwischenstufen erreicht wird. Da bei den Zwischenstufen (Vertrieb) nichts produziert sondern nur zwischengelagert wird sowie die Lagerkapazität endlich ist, ist es sinnvoll, die x_{ij} als Waren*ströme* x_{ij} aufzufassen und darüber hinaus noch die Menge W_i des in jeder Stufe i vorrätigen *Bestands* an Waren bzw. Gütern in Lagern, Verkaufsräumen etc. als weitere dynamische Variable einzuführen. Die folgenden Überlegungen werden einfacher, wenn wir W_i nicht als die Warenmenge, sondern als *Differenz* zum angezielten Lagerbestand auffassen. Positive Werte bezeichnen also zu hohe und negative Werte zu geringe Lagerbestände.

Wir betrachten nun der Übersichtlichkeit halber die konkreten lineare Warenflussbeziehungen der Abb. 5.7. Zunächst gelten folgende unmittelbar anschauliche Kontinuitätsbeziehung zwischen den Waren W_i in den Lagern des Sektor i und den Warenströmen:

$$\frac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}t} = x_{12}(t) - x_{23}(t), \quad \frac{\mathrm{d}W_3}{\mathrm{d}t} = x_{23}(t) - y(t). \tag{5.28}$$

Des Weiteren versuchen die Warendisponenten der jeweiligen Sektoren, zu niedrige oder zu hohe Lagerbestände durch Hoch- bzw. Herunterfahren der Warenbestellungen vom jeweils vorgelagerten Sektor zu kontrollieren, während die nachgelagerten Sektoren als nicht weiter beeinflussbare Nachfrager auftreten. Die Änderung des Warenflusses vom vorgelagerten Sektor kann jedoch nicht augenblicklich geschehen, da beim Hochfahren erst Ressourcen für die erhöhten Warenflüsse (bzw. beim ersten Sektor für die Produktionsrate x_1) bereitsgestellt werden müssen und außerdem zwischen Bestellung und Lieferung eine endliche Zeitspanne liegt.

Damit kann man die Warenstrm̈e nur allmählich hoch- oder herunterfahren. Es wird nun folgendermaßen disponiert:

- Ist zu wenig in den Lagern ($W_i < 0$), wird der eingehende Warenstrom hochgefahren, und zwar umso mehr, je höher der Fehlbestand ist.
- Analog werden bei zu hohem Bestand die Bestellungen heruntergefahren.

In der Sprache der Mathematik lautet dies:

$$\frac{\mathrm{d}x_{12}}{\mathrm{d}t} = -\beta_2 W_2, \quad \frac{\mathrm{d}x_{23}}{\mathrm{d}t} = -\beta_3 W_3. \tag{5.29}$$

Hierbei geben die Parameter β_i an, wie schnell die Sektoren auf Bestellungen reagieren können. Leitet man nun die Gleichungen von (5.29) noch einmal nach der Zeit ab, so

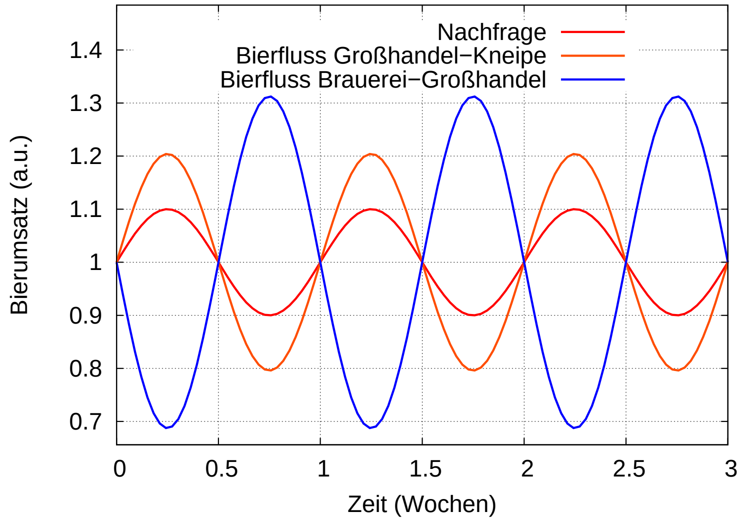


Abbildung 5.8: Der Bullwhip-Effekt bei der Distribution von Bier an die Biergärten

kann man mit (5.28) die Variablen der Warenbestände eliminieren und erhählt ein dynamisches Verflechtungsmodell, was für diesen speziellen Fall **Supply-Chain-Modell** genannt wird:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_{12}}{\mathrm{d}t^2} = -\beta_2 (x_{12} - x_{23}), \qquad \frac{\mathrm{d}^2 x_{23}}{\mathrm{d}t^2} = -\beta_3 (x_{23} - y). \tag{5.30}$$

Nimmt man nun an, dass die Nachfrage $y(t)$ mit der Amplitude A_y und der Periode $2\pi/\omega$ schwankt, also

$$y(t) = \bar{y} + A_y \cos \omega t,$$

und naturgemäß alle Warenströme mit derselben Periode schwanken (das System ist ja nachfragegetrieben!), so zeigt direktes Einsetzen, dass sich die Amplitude der Schwankungen aufschaukelt, wenn man in der Produktionskette (*Supply Chain*) "nach vorne", also Richtung Hersteller geht. Insbesondere haben die Warenströme x_{23} und x_{12} die Amplituden

$$A_{23} = \left| \frac{A_y}{1 - \frac{\omega^2}{\beta_3}} \right|, \qquad A_{12} = \left| \frac{A_{23}}{1 - \frac{\omega^2}{\beta_2}} \right| = \left| \frac{A_y}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\beta_2}\right)\left(1 - \frac{\omega^2}{\beta_3}\right)} \right|.$$

Abbildung 5.8 zeigt dies am Beispiel der Supply Chain des Bieres von der Brauerei über den Großhandel zur Kneipe bzw. Biergarten bis zur durstigen Kehle des "Endverbrauchers". Der Ausstoß der Endabnehmer schwankt wöchentlich (z.B. mit Peaks an den Freitagen oder Samstagen). Die Lieferzeit $T_3 = 2\pi/\omega_3$ des Großhandels an die Kneipe beträgt im Beispiel 5 Tage und die der Brauerei an den Großhandel $T_2 = 2\pi/\omega_2 = 9$ Tage. Man sieht, dass bei Lieferzeiten länger als die Schwankungsperiode der Nachfrage sich die Schwankungen im Vorzeichen umkehren, ansonsten nicht.

Diskussion

- Sind die Nachfrageschwankungen sehr langsam, ist ω sehr viel kleiner als die durch $\sqrt{\beta_i}$ charakterisierten Reaktionsschnelligkeiten der "Kettenglieder" der Supply Chain ($1/\sqrt{\beta_i}$ sind die Reaktionszeiten). Dann kommt die Produktionskette mit den Schwankungen mit und die Amplituden vergrößern sich kaum.

- Sind die Nachfrageschwankungen sehr schnell, ω also deutlich größer als alle $\sqrt{\beta_i}$, nehmen die Schwankungen ab: Ehe die Disponenten ihre Warenströme deutlich hoch- oder herunterfahren können, hat sich die Nachfrageschwankung schon ins Gegenteil verkehrt.

- Sind die Nachfrageschwankungen hingegen von der Größenordnung der Reaktionszeiten der Sektoren, ω also von ähnlicher Größe wie die $\sqrt{\beta_i}$, steigen die Schwankungen rapide an. Dies bezeichnet man auch als **Bullwhip-Effekt.**

Aufgabe: Geht es besser?

Was könnte der Lagerdisponent unternehmen, um den Bullwhip-Effekt zu vermeiden?

Antwort: (1) vorhersagbare Zyklen (im Bier-Beispielwie der Wochenzyklus und auch ein Jahreszyklus) durch sogenannte *Ganglinien* historischer Daten antizipieren. (2) Auf unregelmäßigere Schwankungen (beispielsweise durch Schön- bzw. Schlechtwetter) antizipativer disponieren und beispielsweise die Bestellungen nicht nur nach dem Lager*bestand*, sondern zusätzlich in Abhängigkeit der aktuellen *Änderungen* des Bestands hoch oder herunterfahren. (Dies ergibt in den Gleichungen zusätzliche "Dämpfungsterme", welche die Schwankungen mäßigen.)